73 Multiple choice

(a) De los siguientes estados, solo uno no viola la desigualdad de CHSH ¿Cuál es?

A $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$

B $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$

C $\frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + 2\,|1\rangle \otimes |1\rangle)$

D $\frac{1}{3}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$

E $\frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$

Disclaimer: Mirar la clase de David del 5/11 antes de leer la resolución.

Recordemos que nos dice la desigualdad de CHSH. Tenemos un espacio de hilbert que es el producto de dos espacios de dos dimensiones, $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, los espacios de Alice y Bob. Ellos pueden medir las magnitudes Q, R y S, T respectivamente, que pueden tomar el valor 1 y -1. La construcción de la desigualdad supone realismo local, es decir que no "molesta" una medición a la del otro y que los valores que pueden tomar estás mediciones están bien definidos. Entonces definimos la magnitud C como

$$C = (Q + R)S + (Q - R)T.$$

Si recuerdan de la clase de David vale que

$$-2 \leq \langle C \rangle \leq 2.$$

Sabemos que en mecánica cuántica, no tienen por qué valer las suposiciones que enuncia esta desigualdad. Ahora si pasemos a ver cuál de los estados que propone el enunciado no viola la desigualdad. Cuando tenemos estados entrelazados, la hipótesis de realismo local no tiene mucho sentido: la medición que hace Alice modifica el estado que tiene Bob y viceversa. Además que no están bien definidos los resultados que puede tener la medición, si no que dependen del protocolo que se use, por ejemplo, qué magnitud se mide primero y cuál después. Veamos que un estado separable (o no entrelazado) **no viola** la desigualdad de CHSH, sin importar cuáles son los operadores ni los estados.

Entonces si $|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|C|\psi\rangle_{AB} &= \langle\varphi|_A \otimes \langle\chi|_B \left[(Q+R)S + (Q-R)T\right] |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B \\
\langle\psi|C|\psi\rangle_{AB} &= \langle\varphi|Q|\varphi\rangle_A \langle\chi|S|\chi\rangle_B + \langle\varphi|R|\varphi\rangle_A \langle\chi|S|\chi\rangle_B + \\
&\quad + \langle\varphi|Q|\varphi\rangle_A \langle\chi|T|\chi\rangle_B - \langle\varphi|R|\varphi\rangle_A \langle\chi|T|\chi\rangle_B
\end{aligned}$$

Entonces como las magnitudes Q, R, S, T pueden valer 1 o -1, $\langle\psi|C|\psi\rangle_{AB}$ cuando son separables está necesariamente acotado entre 2 y -2

$$\begin{aligned}
\langle\psi|C|\psi\rangle_{AB,\max} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 2 \\
\langle\psi|C|\psi\rangle_{AB,\min} &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2
\end{aligned}$$

Si no están convencides, pueden probar con todas las combinaciones posibles de Q, R, S, T. Van a ver que no viola la desigualdad.

Ahora miremos cuál de los estados que nos da el enunciado es un estado separable. Como la consigna dice que solo uno **no viola** la desigualdad, si hay un estado que es separable, si o si va a ser ese el que la cumple. Miremos el estado **E**:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_E &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \\
|\psi\rangle_E &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle)) \\
|\psi\rangle_E &= \frac{1}{2}((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)) \\
|\psi\rangle_E &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \,.
\end{aligned}
$$

Entonces el estado **E** es el que no viola la desigualdad. Si tienen dudas de cómo ver que un estado no está entrelazado, pueden usar este ejercicio cómo práctica. El estado **E** tiene muchos términos mezclados sumando, así que es un buen candidato a poder escribirse como producto de dos estados. El próximo inciso también sirve como práctica.

(b) De los estados construídos en el ejercicio ~~66~~ 67 con $j = 1$, ¿cuántos son estados entrelazados?

A 0
B 1
C 2
D 3
E 4

Escribamos primero todos los estados del ejercicio 67 con $j = 1$ en función de los elementos de la base producto. Si $j = 1$, entonces $m = -1, 0, 1$:

$$
\begin{aligned}
|j = 1, m = -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = 0, m_2 = -1\rangle - |j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = -1, m_2 = 0\rangle) \\
|j = 1, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = 1, m_2 = -1\rangle - |j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = -1, m_2 = 1\rangle) \\
|j = 1, m = 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = 1, m_2 = 0\rangle - |j_1 = 1, j_2 = 1; m_1 = 0, m_2 = 1\rangle)
\end{aligned}
$$

Para que sea más cómodo ver si son estados entrelazados o no, vamos a reescribirlos olvidándonos de j_1, j_2 y tirando el m_1 y m_2 del ket.

$$
\begin{aligned}
|j = 1, m = -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, -1\rangle - |-1, 0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|-1\rangle - |-1\rangle\,|0\rangle) \\
|j = 1, m = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |-1, 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\,|-1\rangle - |-1\rangle\,|1\rangle) \\
|j = 1, m = 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\,|0\rangle - |0\rangle\,|1\rangle).
\end{aligned}
$$

Lo que nos queda son estados análogos (en estructura) a los ejemplos canónicos de dos sistemas bidimensionales entrelazados, por lo que los tres estados son estados no separables. La respuesta correcta al multiple choice es **D**.