> We will have to abandon the philosophy of Democritus and the concept of elementary particles. We should accept instead the concept of elementary symmetries.
>
> *W. Heisenberg.*

En esta guía exploramos el concepto de simetría en el contexto de la mecánica cuántica.

---

74 **Teorema de Wigner**

Considerar una transformación que lleva estados físicos $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ a $|\phi'\rangle$ y $|\psi'\rangle$, y es tal que resulta

$$|\langle\psi'|\phi'\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|\,,$$

para todo ψ y ϕ en el espacio de Hilbert. El teorema de Wigner nos dice que dicha transformación puede representarse actuando sobre el espacio de Hilbert por medio de un operador que es unitario o antiunitario.

(a) Dar ejemplos de operadores que cumplan la hipótesis del teorema de Wigner y que sean unitarios.

(b) Para ver una situación en la que aparecen operadores antiunitarios en este contexto pueden revisar por ejemplo la sección 13.3 del libro de Ballentine sobre el operador de inversión temporal.

75 **Simetrías.** Decimos que una transformación U es una simetría de un sistema si deja invariante el módulo del producto interno entre dos vectores cualesquiera y además deja invariante al Hamiltoniano del sistema H (es decir, cumple $UHU^{-1} = H$). Demostrar que:

(a) $e^{-ip\cdot d/\hbar}$, siendo d una constante real, es una simetría de la partícula libre unidimensional.

(b) $e^{-i\epsilon H/\hbar}$, siendo ϵ una constante real, es una simetría de cualquier sistema cuyo hamiltoniano H no dependa explícitamente del tiempo.

76 **Generador infinitesimal de una simetría continua.** Sea $U(s) = e^{isK}$, con K hermítico y s real, un operador que es simetría de cierto sistema físico de hamiltoniano H independiente del tiempo para todo s.

(a) Probar que $[H, K] = 0$. K se conoce como el generador infinitesimal de la simetría.

(b) Demostrar que el valor de expectación de K se conserva en el tiempo. Se dice que K es entonces una constante de movimiento.

(c) Probar que el momento lineal es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante traslaciones arbitrarias.

(d) Probar que la componente del momento angular en una dirección es la constante de movimiento asociada a la invariancia ante rotaciones arbitrarias alrededor de dicha dirección.

77 **Simetrías y degeneración**

Sea G el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con hamiltoniano H. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de H con energía E, entonces $f(G)|\psi\rangle$ (siendo f una función analítica) también es autoestado de H y tiene la misma energía E. Como en general será $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.

78 **Degeneración en el átomo de Hidrógeno**

El hamiltoniano del átomo de Hidrógeno está dado por

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}\,.$$

(a) Demostrar que $\mathbf{L} \cdot e_n$, siendo e_n un versor arbitrario, es un generador de simetría. Probar que esto implica que los niveles de energía no dependen de m.

(b) Demostrar que el vector de Runge-Lenz

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2me^2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{L}\right) + \frac{\mathbf{r}}{r}\,,$$

conmuta con H_0. $\mathbf{K}$ es el generador infinitesimal de una transformación de simetría y es la existencia de esta simetría la responsable de la *degeneración accidental* en el espectro de energía del átomo de Hidrógeno. Para una derivación detallada ver por ejemplo la sección *"SO(4) Symmetry in the Coulomb Potential"* en el capítulo 4 del libro de Sakurai.

79 Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica la siguiente transformación

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S_z\,\varphi\right)|\alpha\rangle \;\; .$$

(a) Calcular el valor de expectación de S_x en el estado $|\alpha\rangle_R$ en función de los valores de expectación de S_x y S_y en el estado $|\alpha\rangle$. El resultado mostrará una *rotación* de los valores de expectación. En clase vieron que, en general, un operador de la forma $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{J}\cdot\hat{e}_n\varphi\right)$ será un operador que implementará rotaciones de ángulo φ sobre el estado del sistema. Como vimos en el ejercicio 76, el generador de dichas rotaciones es la componente del momento angular en la dirección del eje $\hat{e}_n$ de rotación.

(b) Muestre que si $\varphi = 2\pi$ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -\,|\alpha\rangle \;\; .$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

80 Considerar una partícula en tres dimensiones en un potencial tipo pozo esférico infinito

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & si \quad |\mathbf{r}| \le a \\ \\ \infty & si \quad |\mathbf{r}| > a \end{cases}$$

Hallar los niveles de energía (ver por ejemplo el Ejemplo 4.1 del libro de Griffiths). ¿Qué simetría es la responsable de la degeneración que aparece en dichos niveles?

81 Se tiene una partícula de masa m en un potencial

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \frac{1}{2}m\omega'^2 z^2\,.$$

Probar que el sistema es invariante ante rotaciones alrededor del eje z y conectar esta simetría con la degeneración de los niveles de energía.

82 Se tiene una partícula libre de masa m en un anillo. Encontrar los estados de energía definida y analizar qué cantidades se conservan. Verificar además que la distribución de momentos de la partícula en un estado de energía definida es discreta.

Simetrías discretas

83 Teorema de Bloch
Un cristal tiene invariancia ante traslaciones en un vector de la forma $\mathbf{R}_n = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$, con n_i entero. Esto significa que el hamiltoniano H del cristal es invariante ante traslaciones en el vector R_n, es decir $[H, U(\mathbf{R}_n)] = 0$, siendo $U(\mathbf{R}_n) = \exp(-ip\cdot\mathbf{R}_n/\hbar)$.

(a) Demostrar que los autovalores de $U(\mathbf{R}_n)$ tienen la forma $c(\mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n)$, siendo $\mathbf{k}$ un vector de componentes reales.

(b) Como H y $U(\mathbf{R}_n)$ conmutan, tienen una base común de autofunciones $\Psi(\mathbf{r})$. Demostrar que dichas autofunciones satisfacen

$$\Psi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) = \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_n)\,\Psi(\mathbf{r}) \ .$$

(c) Expandir las autofunciones del inciso anterior en ondas planas y demostrar que la distribución de momentos asociada es discreta.

84 Considere dos autoestados del operador paridad

$$\Pi\,|\alpha\rangle = \epsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \qquad \Pi\,|\beta\rangle = \epsilon_\beta\,|\beta\rangle \ ,$$

donde los autovalores ϵ_α y ϵ_β pueden ser 1 o -1. Muestre que

$$\langle\beta|\mathbf{x}|\alpha\rangle = 0$$

salvo si $\epsilon_\alpha = -\epsilon_\beta$. Relacione este resultado con el argumento usual $\int \phi_\beta^*\mathbf{x}\phi_\alpha \mathrm{d}^3\mathbf{x} = 0$ si ϕ_α y ϕ_β tienen la misma paridad. ¿Qué ocurre con $\langle\beta|\mathbf{p}|\alpha\rangle$? ¿Y con $\langle\beta|\mathbf{S}\cdot\mathbf{x}|\alpha\rangle$?

85 Sea una partícula sometida a un potencial de oscilador armónico cuyo estado inicial a $t = 0$ es el estado coherente

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2}\sum_{n=0}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \ ,$$

donde $\beta \in \mathbb{C}$.

(a) Se mide el operador paridad Π a $t = 0$ obteniéndose el autovalor $+1$. ¿Cuál es el estado $|\psi\rangle$ del sistema a tiempo $t > 0$?

(b) ¿Qué valores puede tomar a $t > 0$ el operador H y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado a un tiempo posterior? ¿Cuál es el primer estado excitado? ¿Qué resultados posibles daría la medición de Π?

86 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) Se tiene un sistema con hamiltoniano $H = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha L_z + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2$ y estado fundamental $|0\rangle$ no degenerado. Entonces, resulta $\langle 0|\,(x^2 + y^2)\,z|0\rangle = 0$ y $\langle 0|xy|0\rangle = 0$.

(b) Cierto estado $|\phi\rangle$ es autovector simultáneo de los operadores de paridad y momento lineal. Entonces, el valor de expectación del momento lineal en dicho estado es nulo.