77 **Simetrías y degeneración**

Sea G el generador infinitesimal de una simetría de cierto sistema con Hamiltoniano H. Demostrar que si $|\psi\rangle$ es un autoestado de H con energía E, entonces $f(G)|\psi\rangle$ (siendo f una función analítica) también es autoestado de H y tiene la misma energía E. Como en general será $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, la existencia de simetrías suele generar un aumento en la degeneración de los niveles de energía.

Primero notamos que como G es el generador infinitesimal de una simetría del sistema de Hamiltoniano H, tenemos que

$$[G, H] = 0\,,$$

y entonces resulta también

$$[f(G), H] = 0\,,$$

para cualquier función f analítica arbitraria.

Veamos ahora entonces cómo demostrar que $f(G)|\psi\rangle$ es autoestado de H con energía E si $H|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$. Para ello, aplicamos H sobre $f(G)|\psi\rangle$ y vemos si el resultado es un número por el mismo estado:

$$H\,[f(G)|\psi\rangle] = f(G)\,[H|\psi\rangle] = f(G)\,[E|\psi\rangle] = E\,[f(G)|\psi\rangle]\ ,$$

donde en la primera igualdad usamos que $f(G)$ conmuta con H y en la segunda que $H|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$. Esto demuestra entonces que $f(G)|\psi\rangle$ es autoestado de H con energía E.

Si sucede que $f(G)|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$, tendremos más de un autoestado de H con la misma energía E. Esto demuestra que la existencia de simetrías suele estar asociada al aumento en la degeneración de los niveles de energía.