$\boxed{86}$ Recordemos en primer lugar algunos resultados:

- x_i, p_i son operadores *impares* (vectores), L_i es *par* (pseudovector).
- Un producto de operadores es *par* si hay un número par de operadores impares, o bien es *impar* si hay un número impar de operadores impares. Por ejemplo,

$$\Pi^\dagger x^3 \Pi = \Pi^\dagger x \Pi \Pi^\dagger x \Pi \Pi^\dagger x \Pi = (-1)^3 x^3 \tag{1}$$
$$\Pi^\dagger x^3 \Pi = -x^3 \tag{2}$$

  La misma idea se puede aplicar a cualquier producto arbitrario de operadores con paridad definida
- Si $[H, \Pi] = 0$, los autoestados $|n\rangle$ de H *no degenerados* deben tener paridad definida.
- Reglas de selección:
  - Los elementos de matriz de un operador *par* entre elementos de *distinta* paridad, se anulan.
  - Los elementos de matriz de un operador *impar* entre elementos de la *misma* paridad, se anulan.

Teniendo en cuenta estos resultados, podemos decidir si los enunciados son verdaderos o falsos.

a) Tenemos que L_z, p_i^2, z^2 son operadores pares, por lo que notamos que el Hamiltoniano es par (equivalentemente, $[H, \Pi] = 0$). En consecuencia, $|0\rangle$, no degenerado, tiene paridad definida. Luego $(x^2 + y^2)z$ es impar, por lo que el elemento de matriz entre $\langle 0|$ y $|0\rangle$ (que son estados de la misma paridad) se anula. Por otro lado, para xy, podemos rotar alrededor de $\hat{z}$ ($U_z|0\rangle = |0\rangle$ por simetría y porque es no degenerado) en $\pi/2$. Entonces[1]

$$\langle 0|xy|0\rangle = \langle 0|U^\dagger x U U^\dagger y U|0\rangle = \langle 0|y(-x)|0\rangle = -\langle 0|xy|0\rangle \,, \tag{3}$$

que sólo se cumple si el valor medio se anula. Concluimos entonces que el enunciado es **VERDADERO**.

Si se quiere, podemos convencernos también viéndolo de la siguiente forma

$$\langle 0|(x^2+y^2)z|0\rangle = \int d^3x \; \psi^*(x,y,z)(x^2+y^2)z\psi(x,y,z) = \int dxdy \; (x^2+y^2) \int dz \; z|\psi(x,y,z)|^2 = 0$$
$$\langle 0|xy|0\rangle = \int d^3x \; \psi^*(x,y,z)xy\psi(x,y,z) = \int dydz \; y \int dx \; x|\psi(x,y,z)|^2 = 0$$

donde si $\psi(x,y,z)$ es par o impar, $|\psi(x,y,z)|^2$ es siempre es par, en cualquiera de las tres variables. Después la integral de una función impar entre $\pm\infty$ siempre se anula.

b) $\hat{\mathbf{p}}$ es impar por lo que los elementos de matriz entre estados de igual paridad se anulan y $|\phi\rangle$ es autoestado de Π, por lo tanto tiene paridad definida. Luego $\langle\phi|\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = 0$. El enunciado entonces es **VERDADERO**.

De nuevo podemos convencernos con la cuenta explícita. Usando $\Pi\hat{\mathbf{p}} = -\hat{\mathbf{p}}\Pi$; $\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = \mathbf{p}|\phi\rangle$ y $\Pi|\phi\rangle = \pm|\phi\rangle$ tenemos

$$\Pi\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = \mathbf{p}\Pi|\phi\rangle = \pm\mathbf{p}|\phi\rangle \tag{4}$$
$$\Pi\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = -\hat{\mathbf{p}}\Pi|\phi\rangle = \mp\hat{\mathbf{p}}|\phi\rangle = \mp\mathbf{p}|\phi\rangle \tag{5}$$

Ambas ecuaciones se satisfacen sólo si $\mathbf{p} = 0$.

[1] Intuitivamente $U_z^\dagger(\frac{\pi}{2})xU_z(\frac{\pi}{2}) = y$, aunque pueden probarlo a partir de las relaciones de conmutación también.