$\boxed{90}$ Considere una partícula de carga q en presencia de un potencial $V(r) = m\omega^2 r^2$ y de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. Defina $\omega_L = -qB/(2m)$ y elija el gauge $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$.

a) Muestre que al hamiltoniano se le suma un operador lineal en ω_L (término paramagnético) y uno cuadrático en ω_L (término diamagnético). Halle los niveles de energía en forma exacta y su degeneración (ayuda: es conveniente definir $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{xy})$, donde a_x, a_y son los operadores de destrucción asociados a los modos en x e y).

Lo primero que debemos recordar para resolver el problema es la forma en la cual el campo magnético entra en la ecuación de Schrödinger. Ya vimos en el ejercicio de niveles de Landau que cuando tenemos una partícula cargada en presencia de un campo magnético el hamiltoniano se modifica de la siguiente manera:

$$H = \frac{P^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}r^2 \Longrightarrow H = \frac{\left(\vec{P} - q\vec{A}\right)^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}r^2 \tag{1}$$

El ejercicio nos dice que consideremos el gauge $\vec{A} = -\vec{r} \times \vec{B}/2$. Utilizando que el campo es uniforme y únicamente tiene componente en $\hat{z}$ podemos ver que el potencial vector tiene la forma:

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(x\hat{y} - y\hat{x}) \tag{2}$$

Reemplazando este potencial en la ecuación (1) obtenemos

$$H = \frac{P^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}r^2 + \frac{qB}{2m}(yP_x - xP_y) + \frac{q^2B^2}{8m}(x^2 + y^2) \tag{3}$$

y usando que $\omega_L = -qB/2m$ (enunciado) y que $L_z = xP_y - yP_x$ llegamos a la expresión

$$H = \frac{P^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}r^2 + \omega_L L_z + m\frac{\omega_L^2}{2}(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Vemos entonces que tal como nos dice el enunciado tenemos el hamiltoniano original más un término proporcional a ω_L y otro proporcional a ω_L^2. Ahora que tenemos el hamiltoniano tenemos que resolverlo exactamente para encontrar los niveles de energía y la degeneración. El ejercicio nos da una ayuda, dice que consideremos los operadores $a_\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y)$.

Lo primero que podemos notar, es que el término proporcional a ω_L^2 es un potencial de oscilador armónico isótropo en x e y. Podemos reescribir el hamiltoniano incluyendo esos términos en el potencial del oscilador armónico original de la siguiente forma.

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + m\frac{\omega^2 + \omega_L^2}{2}x^2 + \frac{P_y^2}{2m} + m\frac{\omega^2 + \omega_L^2}{2}y^2 + \omega_L L_z + \frac{P_z^2}{2m} + m\frac{\omega^2}{2}z^2 \tag{5}$$

Vemos entonces que el campo magnético en z resulta en aumentar la frecuencia de los osciladores en x e y, además de agregar el término paramagnético. El hamiltoniano resultante tiene tres términos que se corresponden con osciladores armónicos para x, y, z y el término paramagnético. Definiendo $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}$ podemos escribir:

$$H = \hbar\tilde{\omega}(a_x^\dagger a_x + \frac{1}{2}) + \hbar\tilde{\omega}(a_y^\dagger a_y + \frac{1}{2}) + \hbar\omega(a_z^\dagger a_z + \frac{1}{2}) + \omega_L L_z \tag{6}$$

Resulta conveniente escribir todos los términos en función de operadores de creación y destrucción. Para esto notamos que el momento angular $L_z = (xP_y - yP_x) = i\hbar(a_y^\dagger a_x - a_x^\dagger a_y)$. Finalmente, veamos si podemos escribir todo en función de $a_\pm^\dagger$ y $a_\pm$. Para esto hay que hacer varias cuentas usando distintas combinaciones de los operadores $a_\pm^\dagger$ y $a_\pm$, es fácil, pero son varias cuentas, así que vamos a poner directamente los resultados.

$$L_z = -\hbar(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) \tag{7}$$

$$a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- \tag{8}$$

Por último, pueden comprobar que los operadores a_+ y a_- cumplen todas las relaciones de conmutación correspondientes a operadores de destrucción, y que los "modos" + y - se encuentran desacoplados. Por lo tanto tenemos $N_+ = a_+^\dagger a_+$ y $N_- = a_-^\dagger a_-$ los operadores de número para los nuevos "osciladores" + y -.

Entonces llegamos a la expresión final del hamiltoniano:

$$H = \hbar\tilde{\omega}\,(N_+ + N_- + 1) - \hbar\,\omega_L\,(N_+ - N_-) + \hbar\omega\left(N_z + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

Que se puede reescribir como

$$H = \hbar\,(\tilde{\omega} - \omega_L)\,N_+ + \hbar\,(\tilde{\omega} + \omega_L)\,N_- + \hbar\omega\,N_z + \hbar\left(\tilde{\omega} + \frac{\omega}{2}\right) \tag{10}$$

Vemos entonces que nuestro hamiltoniano tiene tres términos que dependen de operadores de número para distintos modos más un término constante. Es interesante notar que cada operador de número está acompañado por una frecuencia diferente, lo que hace que esto sea análogo a un oscilador tridimensional anisótropo, por lo que sus niveles de energía no van a estar degenerados (salvo elecciones particulares de las frecuencias). Por último, los operadores N_+, N_-, N_z conmutan entre sí, formando entonces un CCOC. Los autoestados de nuestro hamiltoniano van a ser entonces de la forma $|n_+, n_-, n_z\rangle$.

El estado fundamental $|0,0,0\rangle$ tiene energía $E_0 = \hbar(\tilde{\omega} + \omega/2)$. Mientras que los primeros tres estados excitados tienen energías:

(a) $|100\rangle$: $E_{100} = 2\hbar - \hbar\omega_L + \hbar\omega/2$

(b) $|010\rangle$: $E_{010} = 2\hbar + \hbar\omega_L + \hbar\omega/2$

(c) $|001\rangle$: $E_{001} = \hbar + 3\hbar\omega/2$

b) Este inciso nos pide que mostremos que en el límite $\omega_L << \omega$ el efecto diamagnético se vuelve despreciable en comparación con el paramagnético. Para esto comparamos los dos términos. Esto se ve fácilmente notando que el término paramagnético es proporcional a $_L$, mientras que el diamagnético va como ω_L^2/ω. Si dividimos el hamiltoniano por tenemos entonces que el término paramagnético va a ser proporcional a ω_L/ω mientras que el diamagnético es proporcional a ω_L^2/ω^2. Por lo tanto, cuando $\omega_L/\omega << 1$, tenemos que el término paramagnético depende de este cociente a primer orden, mientras que el diamagnético depende del cociente al cuadrado. Si pensamos a los efectos del campo magnético como perturbaciones del hamiltoniano original, y lo pensamos como un desarrollo en potencias de ω_L vemos que el término paramagnético se corresponde con una perturbación a primer orden, mientras que el diamagnético aparece como segundo orden. En este sentido podemos decir que la contribución del término diamagnético es despreciable en comparación con el término paramagnético.

c) Nos piden que consideremos el primer nivel excitado del oscilador, el que tiene energía $E = 5\hbar\omega/2$

cuando $\omega_L \to 0$. Nos piden que estudiemos a primer orden en $\omega_L/_\omega$ como se desdobla este nivel por la presencia del campo magnético (Efecto Zeeman).

Lo que nos están pidiendo que hagamos en este caso es un desarrollo perturbativo para el primer nivel excitado del oscilador armónico considerando como perturbación al término paramagnético. La idea es la siguietne:

$$H = H_0 + W \tag{11}$$

donde H_0 es el hamiltoniano del oscilador sin campo y $W = \omega_L L_z$. Como el nivel tiene degeneración 3, para encontrar las variaciones en la energía de cada estado provocadas por la perturbación vamos a tener que diagonalizar el bloque correspondiente de W.
El bloque de la matriz que nos interesa está dado por los estados $|nx, ny, nz\rangle = |1,0,0\rangle, |0,1,0\rangle, |0,0,1\rangle$, y tiene la siguiente forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\omega_L & 0 \\ i\hbar\omega_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Diagonalizando esta matriz obtenemos tres autovalores $\lambda_0 = 0$, $\lambda_+ = \hbar\omega_L$ y $\lambda_- 0 - \hbar\omega_L$. Por lo tanto las nuevas energías van a ser: $E_0 = 5\hbar\omega/2$,$E_+ = 5\hbar\omega/2 + \hbar\omega_L$ y $E_- = 5\hbar\omega/2 - \hbar\omega_L$. Vemos que el campo magnético rompe la degeneración entre los tres niveles.
El ejercicio piden que hagan lo mismo para el segundo nivel excitado. En ese caso van a tener que diagonalizar una matriz de 6x6, y van a encontrar que no se rompe completamente la degeneración, ya que dos niveles quedan con la misma energía.

d) El último punto nos pide que estudiemos cómo afecta el efecto diamagnético al estado fundamental del oscilador. Esto lo podemos ver exactamente con la solución del inciso (a). Recordamos que el hamiltoniano era

$$H = \hbar(\tilde{\omega} - \omega_L) N_+ + \hbar(\tilde{\omega} + \omega_L) N_- + \hbar\omega N_z + \hbar\left(\tilde{\omega} + \frac{\omega}{2}\right) \tag{13}$$

Por lo tanto el estado fundamental tiene energía $E_0 = \hbar(\tilde{\omega} + \omega/2)$. También sabemos que $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \omega_L^2} = \omega\sqrt{1 + \omega_L^2/\omega^2}$, por lo tanto podemos escribir la energía del nivel fundamental como

$$E_0 = \hbar\omega\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2}} + \frac{1}{2}\right) \tag{14}$$

Vemos que en el límite $\omega_L \to 0$ recuperamos $E_0 = 3\hbar\omega/2$. Ahora queremos saber cómo es la función de onda del fundamental. Para eso usamos las siguientes relaciones

$$a_+ |0,0,0\rangle = 0$$

$$a_- |0,0,0\rangle = 0$$

$$a_z |0,0,0\rangle = 0$$

Utilizando las definiciones de a_+ y a_- es muy fácil ver que se cumplen también entones las relaciones

$$a_x |0,0,0\rangle = 0$$

$$a_y |0,0,0\rangle = 0$$

$$a_z |0,0,0\rangle = 0$$

Que es lo mismo que tenemos para el estado fundamental del oscilador armónico tridimensional. Debemos recordar únicamente que los operadores de destrucción para las direcciones x e y tienen la frecuencia $\tilde{\omega}$ en vez de ω. Por lo tanto la solución va a ser la misma que la del oscilador tridimensional, pero con las frecuencias modificadas en x e y. La función de onda es:

$$\Psi_0(x,y,z) = \left(\frac{m\tilde{\omega}}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}x^2}\, e^{-\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}y^2}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}z^2} \tag{15}$$

Es decir, un producto de tres gaussianas, una por componente. Si miramos los σ de cada campana encontramos que son $\sigma_x = \sigma_y = (\hbar/(m\tilde{\omega}))^{1/2}$ y $\sigma_z = (\hbar/(m\omega))^{1/2}$. Si comparamos el ancho en las direcciones x e y con el de z encontramos que

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{1}{(1+\frac{\omega_L^2}{\omega^2})^{1/4}} \tag{16}$$

Vemos entonces que la función de onda se comprime alrededor del eje z.
El problema nos dice también que veamos que aparece una corriente. Si calculan la probabilidad de corriente para el estado fundamental utilizando la fórmula que vimos en clase les va a dar cero, pero esto se debe a que la corriente de probabilidad se modifica en presencia de un campo electromagnético. La fórmula que tienen que usar para calcular la corriente es (ver Ballentine pág. 313-314)

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \mathcal{R}e\{\Psi^* \left[\frac{\vec{P}}{m} - \frac{q\vec{A}(\vec{r},t)}{mc}\right]\Psi\} \tag{17}$$

El segundo término es distinto de cero y por lo tanto se induce una corriente.
Por último, nos piden verificar si con la presencia del campo magnético el nivel fundamental continúa siendo autoestado de L_z y L^2. Primero chequeamos L_z, recordando que se podía escribir como

$$L_z = -\hbar\,(N_+ - N_-)$$

El estado fundamental es $|n_+, n_-, n_z\rangle = |0,0,0\rangle$, por lo que tenemos:

$$L_z\,|0,0,0\rangle = -\hbar(N_+\,|0,0,0\rangle - N_-\,|0,0,0\rangle) = 0\,|0,0,0\rangle \tag{18}$$

Vemos que el estado fundamental es un autoestado del operador L_z con autovalor nulo $m = 0$.
Para ver si el fundamental es autoestado de L^2 es conveniente definir este operador en términos de los operadores de creación y destrucción. Para esto recordamos que

$$L^2 = L_z^2 + L_z + L_-L_+ \tag{19}$$

Por lo tanto necesitamos escribir los operadores $L_\pm$ en función de los operadores de creación y destrucción. Para eso hacemos con L_x y L_y lo que ya hicimos con L_z para obtenerlos en función de operadores de creación y destrucción. El resultado final es

$$L^2 = L_z^2 + L_z + \hbar^2\, a_-a_+\,(2N_z + 1 - a_z^2 - {a_z^\dagger}^2) \tag{20}$$

Es fácil ver que los autoestados del hamiltoniano no van a ser autoestados de L^2, ya que el tercer término del operador modifica los valores de nx, ny y n_z. Por lo tanto, al encender el campo el fundamental deja de ser un autoestado de L^2. Esto tiene sentido, ya que mirando la función de onda nos damos cuenta de que es simétrica con respecto a rotaciones alrededor del eje z, pero no ante rotaciones en los otros ejes.