108 Considere dos partículas en una dirección interactuando a través del Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \alpha\left(x_1 - x_2\right)^2 .$$

Encuentre los estados de energía definida posibles cuando

(a) Las partículas son distinguibles.

Tenemos que hallar los autoestados de $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \alpha\left(x_1 - x_2\right)^2$. A primera vista, no resulta evidente cómo diagonalizar dicho operador. La forma que tiene la interacción sugiere introducir nuevos operadores

$$x_\pm \equiv \frac{x_1 \pm x_2}{\sqrt{2}}\,, \qquad (1)$$

$$p_\pm \equiv \frac{p_1 \pm p_2}{\sqrt{2}}\,, . \qquad (2)$$

Estos operadores cumplen

$$[x_\pm, p_\pm] = i\hbar\,, \quad [x_\pm, p_\mp] = 0\,, \quad [x_+, x_-] = [p_+, p_-] = 0\,.$$

$p_1^2 + p_2^2$ se puede pensar como la norma al cuadrado del vector (p_1, p_2). Dado que (p_+, p_-) es un vector que se obtiene rotando $p_1^2 + p_2^2$ en un ángulo de $\pi/4$ (ver ecuación (2)), y como una rotación no cambia la norma de un vector, tenemos que $p_1^2 + p_2^2 = p_+^2 + p_-^2$. Con esto, es entonces muy sencillo escribir H en términos de estos nuevos operadores

$$H = \frac{p_+^2}{2m} + \frac{p_-^2}{2m} + 2\alpha x_-^2 \equiv H_+ + H_-\,.$$

Vemos entonces que el Hamiltoniano es una suma del de una partícula libre y un oscilador armónico de frecuencia $\omega \equiv 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$. Como $[H_+, H_-] = 0$, las autofunciones de H son el producto de autofunciones de H_+ (ondas planas $\phi_p(x_+) = \frac{e^{ipx_+/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$) por autofunciones de H_- (que notamos como $\psi_n(x_-)$; recuerden que estas autofunciones tienen paridad $(-1)^n$).

Cuando las partículas son distinguibles, los estados de energía definida posibles son entonces $\phi_p(x_+)\psi_n(x_-) = \phi_p\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)\psi_n\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)$. Si hubiera grados de libertad asociados al espín se agregarían en producto tensorial.

(b) Las partículas son muones.

Los muones son partículas de espín 1/2, así que además de la parte orbital tenemos que considerar el espín. Como $s = 1/2$, las partículas son fermiones, por lo que los estados permitidos deben ser antisimétricos ante intercambio de las partículas. Como $\phi_p(x_+) = \phi_p\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right)$ depende de $x_1 + x_2$, al intercambiar las partículas no va a cambiar nada en esta función, así que podemos olvidarnos de esta parte al momento de construir los estados completamente antisimétricos. Para $\psi_n(x_-) = \psi_n\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}\right)$, tenemos que ante intercambio de la partícula 1 por la 2 se obtiene

$$\psi_n\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) \to \psi_n\left(-\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right) = (-1)^n \psi_n\left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)\,,$$

donde en la última línea usamos que ψ_n es par si n es par, mientras que es una función impar si n es un número impar. Así, vemos que esta autofunción es simétrica ante intercambio de las partículas para n par, y antisimétrica para n impar. Con esto ya resuelto, nos queda construir los estados de espín de dos partículas simétricos y los antisimétricos ante intercambio. Estos son simplemente los estados del triplete (simétricos):

$$\left\{ |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \;, \quad |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \;, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right) \right\} .$$

y el singlete (antisimétrico):

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right) \right\} .$$

Los estados de energía definida podrán obtenerse entonces multiplicando una parte orbital simétrica por una parte de espín antisimétrica, o viceversa, de modo tal que el estado completo sea antisimétrico. Los estados de energía definida son entonces:

$$\phi_p \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_{2n} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right)$$

y

$$\phi_p \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right) \psi_{2n+1} \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left\{ \begin{array}{l} |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \right) \\ |\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 \end{array} \right. ,$$

donde n es un natural o cero, y p un número real.

(c) Las partículas son bosones W^+.

En este inciso, las partículas tienen espín $s = 1$, es decir que son bosones. La forma de resolverlo es análoga a la del inciso anterior, sólo que ahora el estado completo debe ser simétrico ante intercambio de las partículas. La única complicación radica en hallar los estados simétricos y antisimétricos de dos espines 1, algo que les dejamos para que piensen.