Clase 12 - Martes 28/09/2021

La clase pasada vimos:

- Oscilador armónico: formulación
- Operadores de subida y de bajada
- Autovalores de N
- Estado fundamental y estados excitados

En esta clase veremos:

- Momento angular orbital
- Reglas de conmutación: momento angular general
- Operadores de subida y bajada
- Autovalores de J^2 y J_z

El oscilador armónico en mecánica cuántica

REPASO

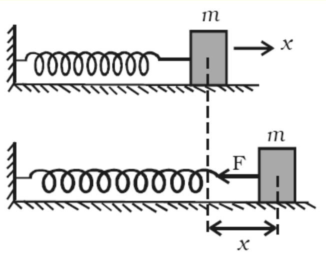
$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$x \longrightarrow X$$

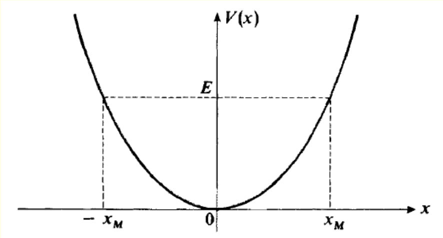
$$p \longrightarrow P$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

con $[X, P] = i\hbar$



Linear harmonic oscillator



Queremos resolver el problema de autovalores:

$$H \,|\, \varphi \rangle = E \,|\, \varphi \rangle$$

REPASO

Adimensionalizamos :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, X$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, P$$

$$\rightarrow \quad [\hat{X}, \hat{P}] = i$$

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

$$\rightarrow \quad H = \hbar\omega\, \hat{H}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2)$$

Definimos los operadores
de subida y de bajada :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

$$\rightarrow \quad [a, a^\dagger] = 1$$

REPASO

Definimos el operador : $N = a^{\dagger}a$

$$\hat{H} = a^{\dagger}a + \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{H} = N + \frac{1}{2}$$

$$N \,|\, \varphi_{\nu}^{i} \rangle = \nu \,|\, \varphi_{\nu}^{i} \rangle$$

Teorema I : $\nu \geq 0$

Teorema II :

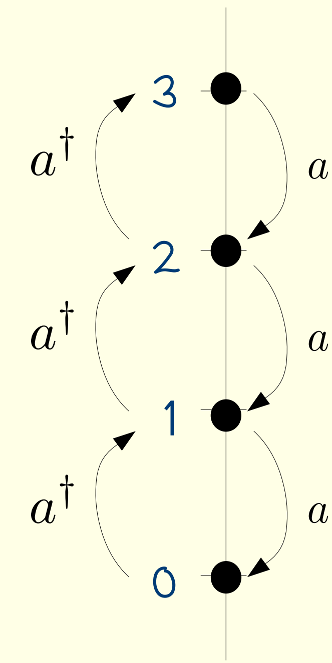
(a) Si $\nu = 0$, entonces $a|\varphi_{\nu=0}^{i}\rangle = 0$

(b) Si $\nu > 0$, entonces $a|\varphi_{\nu}^{i}\rangle \neq 0$ y $\boxed{Na|\varphi_{\nu}^{i}\rangle = (\nu - 1)a|\varphi_{\nu}^{i}\rangle}$

Teorema III :

(a) $\forall \nu \longrightarrow a^{\dagger}|\varphi_{\nu}^{i}\rangle \neq 0$

(b) $\boxed{Na^{\dagger}|\varphi_{\nu}^{i}\rangle = (\nu + 1)a^{\dagger}|\varphi_{\nu}^{i}\rangle}$



REPASO

$$a|\varphi^{i}_{\nu=0}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x) = 0$$

DETERMINACIÓN DEL ESTADO FUNDAMENTAL

$$\Rightarrow \varphi_0(x) = A_0\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

con $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (verificar)

El resto de las autofunciones se obtiene aplicando a^+

$$\varphi_n(x) = A_n\, a^{+n}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

y $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

Momento angular: reglas de conmutación

Momento angular: reglas de conmutación

Momento angular

momento angular orbital (OAM / MAO): $\vec{L}$

" " de espín (SAM / MAS): $\vec{S}$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

Momento angular total

OAM

Usando las reglas de cuantización:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= Y P_z - Z P_y \\ L_y &= Z P_x - X P_z \\ L_z &= X P_y - Y P_x \end{aligned}\right\} \quad \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

Evaluemos:

$$\left[L_x, L_y\right] = \left[yP_z - zP_y, zP_x - xP_z\right]$$

$$= \left[yP_z, zP_x\right] - \left[yP_z, xP_z\right] - \left[zP_y, zP_x\right] + \left[zP_y, xP_z\right]$$

$$= \left[yP_z, zP_x\right] + \left[zP_y, xP_z\right]$$

$$= y\left[P_z, z\right]P_x + x\left[z, P_z\right]P_y$$

$$= -i\hbar\, yP_x + i\hbar\, xP_y = i\hbar\left(xP_y - yP_x\right)$$

$$= i\hbar L_z$$

Momento angular: reglas de conmutación

y análogamente

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[L_i, L_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} L_k}$$

Def. un mom. ang. general $\vec{J}$ por las reglas de conmutación:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} J_k$$

Momento angular general

Momento angular: reglas de conmutación

Def. un mom. ang. general $\vec{J}$ por las reglas de conmutación:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} J_k$$

Introducimos el operador hermítico:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

Se muestra fácilmente que: $[J^2, J_i] = 0$

Momento angular: reglas de conmutación

$$\left[J^2, J_i \right] = 0$$

Prueba:

$$\left[J^2, J_x \right] = \left[J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_x \right] = \left[J_y^2, J_x \right] + \left[J_z^2, J_x \right]$$

$$= J_y \left[J_y, J_x \right] + \left[J_y, J_x \right] J_y + J_z \left[J_z, J_x \right] + \left[J_z, J_x \right] J_z$$

$$= - i\hbar\, J_y J_z - i\hbar\, J_z J_y + i\hbar\, J_z J_y + i\hbar\, J_y J_z = 0$$

Momento angular: reglas de conmutación

$$\left[J^2, J_i \right] = 0$$

Conmutan y ∴ son operadores compatibles.

En cambio, J_x, J_y, J_z no.

En problemas con potencial central tomaremos

$\{H, L^2, L_z\}$ como CCOC.

Operadores de subida y de bajada
(Ladder operators)

Operadores de subida y de bajada (Ladder operators)

Ladder operators

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y$$

Veamos sus propiedades:

$$J_+ J_- = (J_x + i J_y)(J_x - i J_y)$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + i J_y J_x - i J_x J_y$$

$$= J_x^2 + J_y^2 - i [J_x, J_y]$$

$$= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z$$

Operadores de subida y de bajada (Ladder operators)

Ladder operators

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

$$\left.\begin{aligned} J_+ J_- &= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z \\ J_- J_+ &= J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow [J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

Otros conmutadores útiles:

$$[J^2, J_\pm] = [J^2, J_x \pm i J_y] = [J^2, J_x] \pm i [J^2, J_y] = 0$$

Operadores de subida y de bajada (Ladder operators)

Ladder operators

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

Otros conmutadores útiles:

$$[J_z, J_\pm] = [J_z, J_x \pm i J_y]$$

$$= [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y]$$

$$= (i\hbar J_y \pm i (-i\hbar) J_x)$$

$$= i\hbar J_y \pm \hbar J_x$$

$$= \pm \hbar (J_x \pm i J_y) = \pm \hbar J_\pm$$

Operadores de subida y de bajada (Ladder operators)

Ladder operators

$$J_\pm = J_x \pm i J_y$$

Otros conmutadores útiles:

$$J_+ J_- = J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z$$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

$$\Rightarrow J^2 = J_+ J_- + J_z^2 - \hbar J_z$$

$$\Rightarrow J^2 = J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$$

$$J^2 = \frac{1}{2}\left(J_+ J_- + J_- J_+\right) + J_z^2$$

Autovalores de J^2 y J_z

Teo. Los autovalores de J^2 son positivos

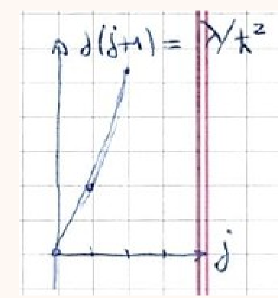
$$\forall |\psi\rangle : \langle\psi|J^2|\psi\rangle = \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_y^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle$$

$$= \| J_x|\psi\rangle \|^2 + \| J_y|\psi\rangle \|^2 + \| J_z|\psi\rangle \|^2 \geq 0$$

En particular, si $|\psi\rangle$ es un autoestado de J^2 : $\quad J^2|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \langle\psi|J^2|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle = \lambda \geq 0$$

Podemos expresarlo : $\boxed{\lambda = j(j+1)\hbar^2 \qquad (\text{con } j \geq 0)}$



Autovalores de J^2 : $\lambda = j(j+1)\hbar^2$ (con $j \geq 0$)

Autovalores de J_z : $m\hbar$

Problema: resolver simultáneamente:

$$\begin{cases} J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle \end{cases}$$

¿Cuáles son los posibles valores de j, m?

Autovalores de J^2 y J_z

Autovalores de J^2 y J_z

- Si $|jm\rangle$ es autoestado común de J^2 y J_z :

$$\begin{cases} J^2 |jm\rangle = j(j+1)\hbar^2 |jm\rangle \\ J_z |jm\rangle = m\hbar |jm\rangle \end{cases}$$

Entonces $J_\pm |jm\rangle$ también lo es.

Autovalores de J^2 y J_z

Entonces $J_\pm |jm\rangle$ también lo es.

Dem:

$$\underbrace{J^2 J_\pm |jm\rangle} = J_\pm J^2 |jm\rangle = \underbrace{j(j+1)\hbar^2}_{\text{mismo autovalor}} \underbrace{J_\pm |jm\rangle}$$

$$[J^2, J_\pm] = 0$$

$$J_z J_\pm |jm\rangle = (J_\pm J_z \pm \hbar J_\pm) |jm\rangle =$$

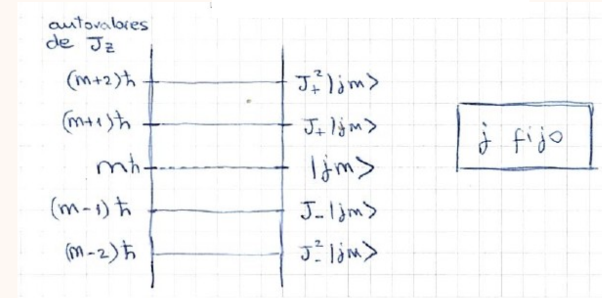
$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

$$= J_\pm (J_z \pm \hbar \mathbb{1}) |jm\rangle$$

$$= J_\pm (m\hbar \pm \hbar) |jm\rangle$$

$$= \underbrace{(m \pm 1)\hbar}_{\text{cambia autovalor } \pm\hbar} \underline{J_\pm |jm\rangle}$$

Autovalores de J^2 y J_z



- Existe un m_{max} / $J_+ |j\, m_{max}\rangle = 0$

(La componente J_z no puede exceder el J total)

Teníamos: $J^2 = J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$

$$
\begin{aligned}
J^2 |j\, m_{max}\rangle &= \left(J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z \right) |j\, m_{max}\rangle \\
&= \left(0 + m_{max}^2 \hbar^2 + m_{max} \hbar^2 \right) |j\, m_{max}\rangle \\
&= m_{max} (m_{max} + 1) \hbar^2 \, |j\, m_{max}\rangle \\
&= j (j+1) \hbar^2 \, |j\, m_{max}\rangle
\end{aligned}
$$

Autovalores de J^2 y J_z

Teníamos: $J^2 = J_+ J_- + J_z^2 - \hbar J_z$

- También existe m_{min} / $J_- |j\, m_{min}\rangle = 0 \Longrightarrow$

$$J^2 |j\, m_{min}\rangle = \left(J_+ J_- + J_z^2 - \hbar J_z\right) |j\, m_{min}\rangle$$
$$= m_{min}(m_{min} - 1)\hbar^2 |j\, m_{min}\rangle$$
$$= j(j+1)\hbar^2 |j\, m_{min}\rangle$$

Vemos que:

$$m_{max}(m_{max} + 1) = m_{min}(m_{min} - 1) = j(j+1)$$

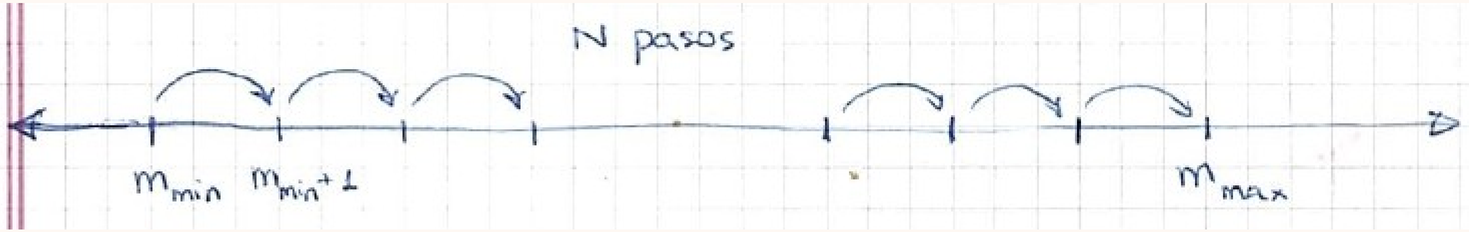
Autovalores de J^2 y J_z

Vemos que:

$$m_{max}\left(m_{max}+1\right) = m_{min}\left(m_{min}-1\right)$$

Si $m_{max} = m_{min} - 1$, se satisface, pero $m_{max} < m_{min}$ ∴ no sirve

Si $m_{max} = -m_{min}$, se satisface ✓



Tenemos $m_{max} = m_{min} + N = -m_{max} + N$

$$\Rightarrow \quad N = 2m_{max} \Rightarrow m_{max} = \frac{N}{2}$$

Tenemos $m_{max} = m_{min} + N = -m_{max} + N$

$$\Rightarrow N = 2m_{max} \Rightarrow m_{max} = \frac{N}{2}$$

- Además: $j = m_{max}$

Conclusión sobre autovalores:

$$\begin{cases} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \\ m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j \end{cases}$$

Autovectores de J^2 y J_z

Autovectores de J^2 y J_z

Normalización:

$$J_+ |j\, m\rangle \propto |j, m+1\rangle$$

$\llcorner$ ¿está normalizado?

$$\| J_+ |j\, m\rangle \|^2 = \langle j\, m | J_- J_+ | j\, m\rangle$$

$$= \langle j\, m | J^2 - J_z^2 - \hbar J_z | j\, m\rangle$$

$$= j(j+1)\hbar^2 - m(m+1)\hbar^2$$

$$\Rightarrow |j, m\pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)^2 - m(m\pm 1)}\,\hbar} J_\pm |j\, m\rangle$$

Autovectores de J^2 y J_z

En síntesis:

$$J_z |j\, m\rangle = m\hbar\, |j\, m\rangle$$

$$J_\pm |j\, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle$$

$$J^2 |j\, m\rangle = j(j+1)\hbar^2\, |j\, m\rangle$$

Resumen de la Clase 12

En esta clase vimos:

- Momento angular orbital
- Reglas de conmutación: momento angular general
- Operadores de subida y bajada
- Autovalores de J^2 y J_z
- Autovectores de J^2 y J_z