# Clase 13 - Viernes 01/10/2021

La clase pasada vimos:

- Momento angular orbital
- Reglas de conmutación: momento angular general
- Operadores de subida y bajada
- Autovalores de $J^2$ y $J_z$
- Autovectores de $J^2$ y $J_z$

**En esta clase veremos:**

- Matrices de : $J^2$, $J_z$ , $J_+$ , $J_-$ , $J_x$ , $J_y$
- El espin: postulados de la teoria de Pauli
- Espin ½
- Espinores de espin ½

REPASO

OAM

Usando las reglas de cuantización:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= Y P_z - Z P_y \\ L_y &= Z P_x - X P_z \\ L_z &= X P_y - Y P_x \end{aligned}\right\} \quad \vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{[L_i, L_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} L_k}$$

Def. un mom. ang. general $\vec{J}$ por las reglas de conmutación:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} J_k$$

REPASO

## Ladder operators

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y$$

Introducimos el operador hermítico:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

En síntesis:

$$J_z |j\, m\rangle = m\hbar\, |j\, m\rangle$$

$$J_{\pm} |j\, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\; |j, m \pm 1\rangle$$

$$J^2 |j\, m\rangle = j(j+1)\hbar^2\, |j\, m\rangle$$

$$\begin{cases} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{cases}$$

# Elementos de matriz del momento angular

Elementos de matriz de $J^2$ :  $\langle jm|J^2|j'm'\rangle = j(j+1)\hbar^2\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}$

| $J^2_{jm,j'm'}$ | $j'$ | $0$ | $1/2$ | | $1$ | | | $3/2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $m \backslash m'$ | $0$ | $1/2$ | $-1/2$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $3/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $-3/2$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | | | | | | | | | |
| $1/2$ | $1/2$ | | $\frac{3}{4}\hbar^2$ | $0$ | | | | | | | |
| | $-1/2$ | | $0$ | $\frac{3}{4}\hbar^2$ | | | | | | | |
| $1$ | $1$ | | | | $2\hbar^2$ | $0$ | $0$ | | | | |
| | $0$ | | | | $0$ | $2\hbar^2$ | $0$ | | | | |
| | $-1$ | | | | $0$ | $0$ | $2\hbar^2$ | | | | |
| $3/2$ | $3/2$ | | | | | | | $\frac{15}{4}\hbar^2$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| | $1/2$ | | | | | | | $0$ | $\frac{15}{4}\hbar^2$ | $0$ | $0$ |

Elementos de matriz de $J_z$ : $\langle jm|J_z|j'm'\rangle = m\hbar\,\delta_{jj'}\delta_{mm'}$

| $J_{z,jm,j'm'}$ | $j'$ | $0$ | $1/2$ | | $1$ | | | $3/2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $m \backslash m'$ | $0$ | $1/2$ | $-1/2$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $3/2$ | $1/2$ | $-1/2$ | $-3/2$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | | | | | | | | | |
| $1/2$ | $1/2$ | | $\frac{1}{2}\hbar$ | $0$ | | | | | | | |
| | $-1/2$ | | $0$ | $-\frac{1}{2}\hbar$ | | | | | | | |
| $1$ | $1$ | | | | $\hbar$ | $0$ | $0$ | | | | |
| | $0$ | | | | $0$ | $0$ | $0$ | | | | |
| | $-1$ | | | | $0$ | $0$ | $-\hbar$ | | | | |
| $3/2$ | $3/2$ | | | | | | | $\frac{3}{2}\hbar$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| | $1/2$ | | | | | | | $0$ | $\frac{1}{2}\hbar$ | $0$ | $0$ |

Elementos de matriz de $J_x$ y $J_y$

$$\begin{cases} J_+ = J_x + i J_y \\ J_- = J_x - i J_y \end{cases} \qquad \begin{cases} J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \\ \\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{i}{2}(J_- - J_+) \end{cases}$$

Teníamos:

$$\langle jm | J_\pm | j'm' \rangle = \langle jm | \hbar \sqrt{j'(j'+1) - m'(m' \pm 1)}\, | j', m' \pm 1 \rangle$$
$$= \hbar \sqrt{j(j+1) - m'(m' \pm 1)}\; \delta_{jj'}\, \delta_{m, m' \pm 1}$$

Entonces:

$$\langle jm | J_x | j'm' \rangle = \frac{1}{2} \langle jm | J_+ | j'm' \rangle + \frac{1}{2} \langle jm | J_- | j'm' \rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2} \delta_{jj'} \left( \sqrt{j(j+1) - m'(m'+1)}\; \delta_{m, m'+1} + \sqrt{j(j+1) - m'(m'-1)}\; \delta_{m, m'-1} \right)$$

$$\langle jm | J_x | j'm' \rangle = \frac{1}{2}\langle jm | J_+ | j'm' \rangle + \frac{1}{2}\langle jm | J_- | j'm' \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\delta_{jj'}\left(\sqrt{j(j+1) - m'(m'+1)}\,\delta_{m,m'+1} + \sqrt{j(j+1) - m'(m'-1)}\,\delta_{m,m'-1}\right)$$

$$\langle jm | J_y | j'm' \rangle = \frac{\hbar}{2i}\left(\sqrt{\cdots}\,\delta_{m,m'+1} - \sqrt{\cdots}\,\delta_{m,m'-1}\right)\delta_{jj'}$$

En lugar de escribir toda la matriz junta, tomamos los sectores con dado j :

$\boxed{j = 1/2}$

$$(J_x)^{1/2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J_y)^{1/2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_+)^{1/2} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J_-)^{1/2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{j=1}$ $(J_+)^1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(J_-)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \hbar$

$(J_x)^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(J_y)^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

De nuevo J = 1/2 , más prolijo:

subida $(J_+)^{(1/2)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

bajada $(J_-)^{(1/2)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Notar las matrices de Pauli

$$\left\{ \begin{aligned} (J_x)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (J_y)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ (J_z)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

# El espín: postulados de

# La teoría de Pauli

OUTLINE OF CHAPTER IX

| | |
|---|---|
| A. INTRODUCTION OF ELECTRON SPIN | 1. Experimental evidence<br>*a.* Fine structure of spectral lines<br>*b.* "Anomalous" Zeeman effect<br>*c.* Existence of half-integral angular momenta<br>2. Quantum description: postulates of the Pauli theory |
| B. SPECIAL PROPERTIES OF AN ANGULAR MOMENTUM 1/2 | |
| C. NON-RELATIVISTIC DESCRIPTION OF A SPIN 1/2 PARTICLE | 1. Observables and state vectors<br>*a.* State space<br>*b.* $\{ \mid \mathbf{r}, \varepsilon \rangle \}$ representation<br>2. Probability calculations for a physical measurement |

OUTLINE OF CHAPTER IV

| | |
|---|---|
| B. ILLUSTRATION OF THE POSTULATES IN THE CASE OF A SPIN $\frac{1}{2}$ | 1. Actual preparation of the various spin states<br>*a.* Preparation of the states $\mid + \rangle$ and $\mid - \rangle$<br>*b.* Preparation of the states $\mid \pm \rangle_x, \mid \pm \rangle_y, \mid \pm \rangle_u$<br>*c.* Preparation of the most general state<br>2. Spin measurements<br>*a.* First experiment<br>*b.* Second experiment<br>*c.* Third experiment<br>*d.* Mean values<br>3. Evolution of a spin 1/2 in a uniform magnetic field<br>*a.* The interaction Hamiltonian and the Schrödinger equation<br>*b.* Larmor precession |

1

Espin

Uelenbeck y Goudsmit (1925) descubren experimental// el espin, $\vec{S}$, a través del momento magnético:

$$\vec{M}_S = 2 \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

Pauli lo habia predicho en 1924.
Sin pasar por la ecuación de Dirac, se puede presentar con los siguientes postulados:

1) $\vec{S}$ es un momento angular. → satisface las reglas de conmutación:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad , \text{ etc.}$$

2) Nuevo espacio de Hilbert (distinto de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$) para los estados de espin: $\mathcal{E}_s$.

$\{S^2, S_z\}$ es un CCOC.

$$S^2 |s,m\rangle = s(s+1)\hbar |s,m\rangle$$

$$S_z |s,m\rangle = m\hbar |s,m\rangle$$

Sabemos $-s \leq m \leq s$

El $s$ es una propiedad fija de cada partícula.

$\mathrm{Dim}(\mathcal{E}_s) =$ 2s+1

3) Espacio total de estados: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}} \otimes \mathcal{E}_s$

Los observables de espin conmutan con los orbitales

4) Para el electrón: $s = \frac{1}{2}$

## Spin $\frac{1}{2}$

Como caso particular del formalismo de momento angular ya sabemos prácticamente todo.

Como $s = j = \frac{1}{2} \rightarrow \dim(\mathcal{E}_s) = 2$

Tomamos base $\left\{ |s=\frac{1}{2}, m_s=\frac{1}{2}\rangle, |s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2}\rangle \right\} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ de autoestados comunes de $S^2$ y $S_z$.

(Se podría trabajar con $S_x$ o $S_y$ en lugar de $S_z$)

$$\begin{cases} S^2 |\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\pm\rangle \\ S_z |\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle \end{cases}$$

# Espín 1/2

$$S^2 |\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |\pm\rangle$$

$$S_z |\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$$

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ generan todo el espacio de Hilbert $\rightarrow$

$\rightarrow$ relación de clausura:

$$\mathbb{1} = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|$$

Podemos expandir todo ket de $\mathcal{E}_s$:

$$|\psi\rangle = |+\rangle\langle+|\psi\rangle + |-\rangle\langle-|\psi\rangle$$

$$= c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$$

Normalización: $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$

Prob. de medir spin $\uparrow$ : $|c_+|^2$

$\downarrow$ : $|c_-|^2$

# Espín 1/2

Representación matricial de $S_x, S_y, S_z$ en la base $\{|\pm\rangle\}$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{cases}$$

Autovalores : $\pm\frac{\hbar}{2}$ y autovectores :

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \pm |-\rangle]$$

$$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle \pm i|-\rangle]$$

Chequeo:

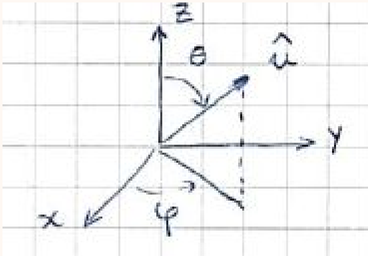
$$S_x|+\rangle_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_x$$

# Espín 1/2

Representación matricial de $S_x, S_y, S_z$ en la base $\{|\pm\rangle\}$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando $S_x, S_y, S_z$ podemos escribir la matriz de $S_{\hat{u}}$ donde: $\hat{u} = (\text{sen}\theta \cos\varphi, \text{sen}\theta\, \text{sen}\varphi, \cos\theta)$




$$S_{\hat{u}} = \vec{S}\cdot\hat{u} = S_x \,\text{sen}\theta \cos\varphi + S_y \,\text{sen}\theta\, s\varphi + S_z \cos\theta$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta\, e^{-i\varphi} \\ \text{sen}\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Es el observable de la proyección de espín en la dirección û

# Espín 1/2

Autovalores : $\pm\frac{\hbar}{2}$ y autovectores :



$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle \pm |-\rangle\right] \quad \text{(A-20)}$$

$$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle \pm i|-\rangle\right] \quad \text{(A-21)}$$

$$\begin{cases} |+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}|-\rangle & \text{(A-22-a)} \\ |-\rangle_u = -\sin\frac{\theta}{2}\,e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi/2}|-\rangle & \text{(A-22-b)} \end{cases}$$

# Espinores de espín 1/2

# Estados de una partícula de espín 1/2

Estados de una
Partícula de espín 1/2 (IX.c)

Espacio de estados

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}} \otimes \mathcal{E}_s$$

Posibles CCOC:

$$\{X, Y, Z, S^2, S_z\} \quad \{P_x\ P_y\ P_z\ S^2\ S_z\} \quad \{H, L^2, L_z, S^2, S_z\}$$

Trabajemos con las bases $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\varepsilon\rangle\}$.
Escribimos los estados producto:

$$|\vec{r}, \varepsilon\rangle = |\vec{r}\rangle \otimes |\varepsilon\rangle$$

Trabajemos con las bases $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\varepsilon\rangle\}$.

Escribimos los estados producto:

$$|\vec{r},\varepsilon\rangle = |\vec{r}\rangle \otimes |\varepsilon\rangle$$

Son autoestados del primer CCOC. Por ej:

$$X\,|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = x\,|\vec{r}\,\varepsilon\rangle$$

$$S_z\,|\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \varepsilon\frac{\hbar}{2}\,|\vec{r}\,\varepsilon\rangle$$

Notar las nuevas formas de ortonormalidad y clausura:

$$\langle\vec{r}\,'\varepsilon'\,|\,\vec{r}\,\varepsilon\rangle = \delta_{\varepsilon'\varepsilon}\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r})$$

$$\mathbb{1} = \sum_{\varepsilon}\int d^3r\,|\vec{r}\,\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\,\varepsilon| = \int d^3r\,|\vec{r}\,+\rangle\langle\vec{r}\,+| + |\vec{r}\,-\rangle\langle\vec{r}\,-|$$

# Espinores de espín 1/2

$$\mathbb{1} = \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, |\vec{r}\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\varepsilon| = \int d^3r \, |\vec{r}+\rangle\langle\vec{r}+| + |\vec{r}-\rangle\langle\vec{r}-|$$

Expansión de un ket $|\psi\rangle$.

$$|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, |\vec{r}\varepsilon\rangle \underbrace{\langle\vec{r}\varepsilon|\psi\rangle}_{\psi_{\varepsilon}(\vec{r})}$$

$$= \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, \psi_{\varepsilon}(\vec{r}) \, |\vec{r}\varepsilon\rangle$$

$$\psi_{\varepsilon}(\vec{r}) \rightarrow \psi_{+}(\vec{r})$$

$$\psi_{\varepsilon}(\vec{r}) \rightarrow \psi_{-}(\vec{r})$$

Hay que dar una función de onda para cada componente del espín.

Para operar es útil la notación de espinores:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{+}(\vec{r}) \\ \psi_{-}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\vec{r}+|\psi\rangle \\ \langle\vec{r}-|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

El adjunto del espinor es :

$$[\psi]^{\dagger}(\vec{r}) = \left( \langle \psi | \vec{r}+ \rangle \quad \langle \psi | \vec{r}- \rangle \right) = \left( \psi_{+}^{*}(\vec{r}) \quad \psi_{-}^{*}(\vec{r}) \right)$$

Producto escalar :

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \varphi \rangle$$

$$= \langle \psi | \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, |\vec{r}\varepsilon\rangle\langle\vec{r}\varepsilon| \, |\varphi\rangle$$

$$= \sum_{\varepsilon} \int d^3r \, \langle \psi | \vec{r}\varepsilon \rangle \langle \vec{r}\varepsilon | \varphi \rangle$$

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int d^3r \sum_{\varepsilon} \langle \psi | \vec{r}\varepsilon \rangle \langle \vec{r}\varepsilon | \varphi \rangle$$

$$= \int d^3r \sum_{\varepsilon} \psi^*_{\varepsilon}(\vec{r})\, \varphi_{\varepsilon}(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \left[ \psi^*_+(\vec{r})\varphi_+(\vec{r}) + \psi^*_-(\vec{r})\varphi_-(\vec{r}) \right]$$

$$= \int d^3r \begin{pmatrix} \psi^*_+(\vec{r}) & \psi^*_-(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+(\vec{r}) \\ \varphi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \int d^3r \, [\psi]^\dagger(\vec{r}) \, [\varphi](\vec{r})$$

## Estados producto

Si $|\varphi\rangle = \int d^3r \; \varphi(\vec{r}) \; |\vec{r}\rangle \in \mathcal{E}_{\vec{r}}$

$|\chi\rangle = c_+ \, |+\rangle + c_- \, |-\rangle \in \mathcal{E}_s$

$\Rightarrow |\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle$ es un estado producto.

$$\psi_\pm(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} \pm |\psi\rangle = \langle \mathbf{r}|\varphi\rangle\langle\pm|\chi\rangle = \varphi(\mathbf{r})c_\pm$$

Espinor $[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r})\, c_+ \\ \varphi(\vec{r})\, c_- \end{pmatrix} = \varphi(\vec{r}) \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$

# Espinores de espín 1/2

$$|\psi\rangle = \sum_{\varepsilon} \int d^3r \ \psi_{\varepsilon}(\vec{r}) \ |\vec{r}\,\varepsilon\rangle$$

$$= \int d^3r \left( \psi_+(\vec{r}) \ |\vec{r}+\rangle + \psi_-(\vec{r}) \ |\vec{r}-\rangle \right)$$

Espinor:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}+|\psi\rangle \\ \langle \vec{r}-|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

Y recordar que: $|\vec{r} \pm\rangle = |\vec{r}\rangle \otimes |\pm\rangle$ ,

## Operadores

Supongamos $|\psi'\rangle = A\,|\psi\rangle$

Trabajando con espinores, el operador A está representado por una matriz de 2x2:

$$[\psi'](\vec{r}) = [\![A]\!]\,[\psi](\vec{r})$$

# Espinores de espín 1/2

Los operadores de espín actúan sobre $|\pm\rangle$

Por ejemplo:

$S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle \qquad S_x|\mp\rangle = \frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$

Notación: $|\uparrow\rangle = |+\rangle, |\downarrow\rangle = |-\rangle$

Supongamos $|\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\downarrow\rangle$

$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
S_+|\psi\rangle &= S_+|\varphi\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\
&= |\varphi\rangle \otimes S_+|\downarrow\rangle = \hbar\,|\varphi\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\
&= \hbar\,|\varphi\uparrow\rangle
\end{aligned}
$$

Como espinores:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow [\psi'](\vec{r}) = \hbar \begin{bmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Espinores de espín 1/2

Como espinores:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix} \longrightarrow [\psi'](\vec{r}) = \hbar \begin{bmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea que usamos la matriz de $S_+$:

$$S_{*}[\psi](\vec{r}) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} = [\psi'](\vec{r})$$

y otro ejemplo

$$S_z [\psi](\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

y en un estado general:

$$S_z [\psi](\vec{r}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ -\psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

Operadores orbitales

No tocan la parte de espín → son proporcionales a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$[\![x]\!] = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$[\![x]\!] \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,\psi_+(\vec{r}) \\ x\,\psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

$$[\![P_x]\!] \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

## Operadores mixtos

Ejemplo:

$$P_x S_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

## Probabilidades de medición

Probabilidad de medir posición y espín y obtener $\vec{r}$ y $\uparrow$

$$dP(\vec{r},+) = |\langle \vec{r}+|\psi\rangle|^2 d^3r$$

$$= |\psi_+(\vec{r})|^2 d^3r$$

# Espinores de espín 1/2

Probabilidad de estar en $\vec{r}$ con cualquier espín?

$$dP(\vec{r}) = \left( |\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2 \right) d^3r$$

Probabilidad de tener espín $\uparrow$ total?

↳ y cualquier posición.

$$P_\uparrow = \int d^3r \, |\psi_+(\vec{r})|^2$$

Elemento de matriz de A

$$\langle \psi | A | \varphi \rangle = \int d^3r \, [\psi]^\dagger(\vec{r}) \, \mathbb{[}A\mathbb{]} \, [\varphi](\vec{r})$$

matriz de 2x2

# Resumen de la Clase 13

En esta clase vimos:

- Matrices de : $J^2$, $J_z$ , $J_+$ , $J_-$ , $J_x$ , $J_y$
- El espín: postulados de la teoría de Pauli
- Espín ½
- Espinores de espín ½