

La clase pasada vimos:

- Matrices de : $J^2, J_z, J_+, J_-, J_x, J_y$
- El espín: postulados de la teoría de Pauli
- Espín $\frac{1}{2}$
- Espinores de espín $\frac{1}{2}$

En esta clase veremos:

- Experimento de Stern-Gerlach
- Preparación de estados de espín
- Rotaciones

Elementos de matriz de J_z : $\langle jm|J_z|j'm'\rangle = m\hbar\delta_{jj'}\delta_{mm'}$

| $J_z, jm, j'm'$ | | j' | 0 | 1/2 | 1 | 3/2 | | | | | | |
|-----------------|------|------|---|--------------------|---------------------|---------|---|----------|--------------------|--------------------|------|------|
| j | m | m' | 0 | 1/2 | -1/2 | 1 | 0 | -1 | 3/2 | 1/2 | -1/2 | -3/2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 1/2 | 1/2 | | | $\frac{1}{2}\hbar$ | 0 | | | | | | | |
| | -1/2 | | | 0 | $-\frac{1}{2}\hbar$ | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | \hbar | 0 | 0 | | | | |
| | 0 | | | | | 0 | 0 | 0 | | | | |
| | -1 | | | | | 0 | 0 | $-\hbar$ | | | | |
| 3/2 | 3/2 | | | | | | | | $\frac{3}{2}\hbar$ | 0 | 0 | 0 |
| | 1/2 | | | | | | | | 0 | $\frac{1}{2}\hbar$ | 0 | 0 |

$$j=1 \quad (J_+)^1 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (J_-)^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \hbar$$

$$(J_x)^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (J_y)^1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

De nuevo $J=1/2$, más prolijo:

subida $(J_+)^{(1/2)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

bajada $(J_-)^{(1/2)} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Notar las matrices de Pauli

$$\left\{ \begin{aligned} (J_x)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (J_y)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ (J_z)^{(1/2)} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Autovalores : $\pm \frac{\hbar}{2}$ y autovectores :

CHAPTER IV

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \pm |-\rangle]$$

(A-20)

$$|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle \pm i |-\rangle]$$

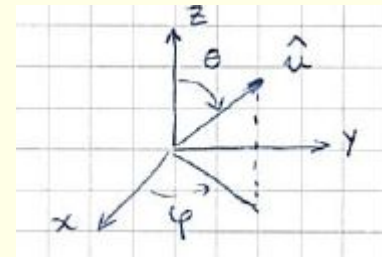
(A-21)

$$\left\{ \begin{aligned} |+\rangle_u &= \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \end{aligned} \right.$$

(A-22-a)

$$\left\{ \begin{aligned} |-\rangle_u &= -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \end{aligned} \right.$$

(A-22-b)



Estados de una
Partícula de espín 1/2 (I x.c)

Espacio de estados
 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\vec{r}} \otimes \mathcal{E}_s$

Posibles CCOC:
 $\{X, Y, Z, S^2, S_z\}$ $\{P_x, P_y, P_z, S^2, S_z\}$ $\{H, L^2, L_z, S^2, S_z\}$

Trabajemos con las bases $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\epsilon\rangle\}$.
Escribimos los estados producto:
 $|\vec{r}, \epsilon\rangle = |\vec{r}\rangle \otimes |\epsilon\rangle$

Para operar es útil la notación de espinores:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}_+ | \psi \rangle \\ \langle \vec{r}_- | \psi \rangle \end{pmatrix}$$

Operadores

Supongamos $|\psi'\rangle = A |\psi\rangle$

Trabajando con espinores, el operador A está representado por una matriz de 2x2:

$$[\psi'](\vec{r}) = \llbracket A \rrbracket [\psi](\vec{r})$$

Elemento de matriz de A

$$\langle \psi' | A | \psi \rangle = \int d^3r [\psi']^\dagger(\vec{r}) \llbracket A \rrbracket [\psi](\vec{r})$$

↑
matriz de 2x2

Ejemplo: Hamiltoniano espín-órbita de Rashba

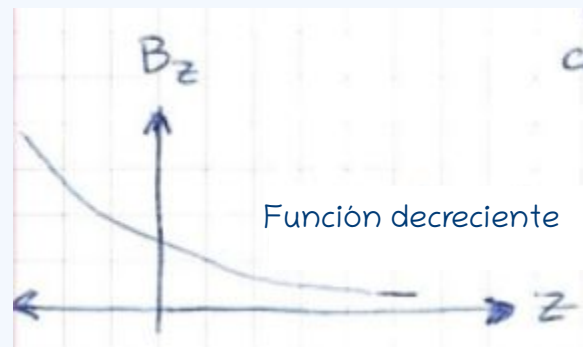
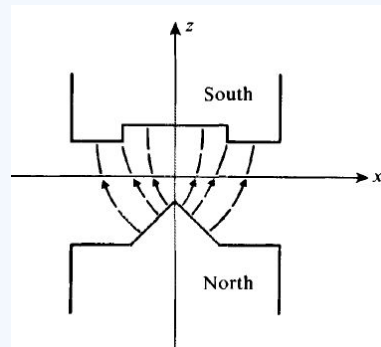
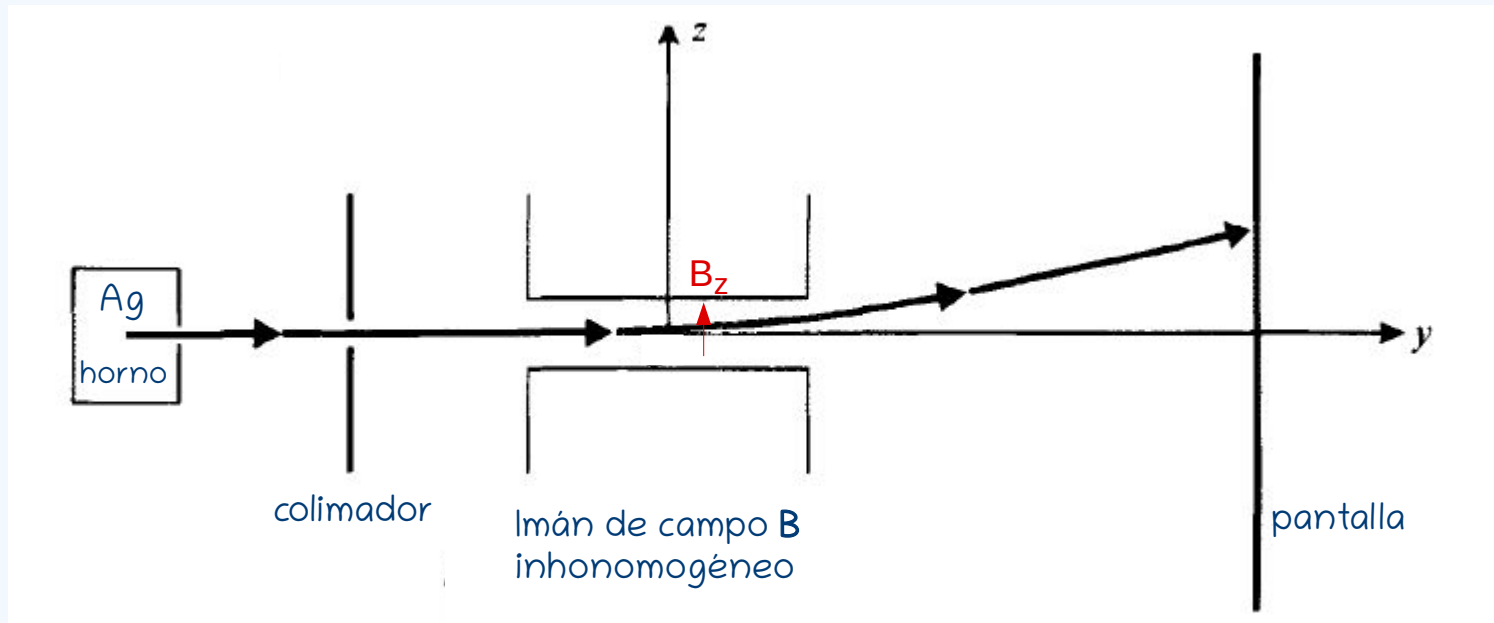
$$H_R = \frac{\alpha}{\hbar} (p_y \sigma_x - p_x \sigma_y) = \frac{\alpha}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & p_y + ip_x \\ p_y - ip_x & 0 \end{pmatrix}$$

Experimento de Stern-Gerlach



Experimento de Stern-Gerlach

(Francfort, 1922)



Átomos de Ag:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Momento magnético : } \vec{M} \\ \text{" angular : } \vec{S} \end{array} \right\} \vec{M} = \gamma \vec{S}$$

Energía potencial : $W = -\vec{M} \cdot \vec{B}$

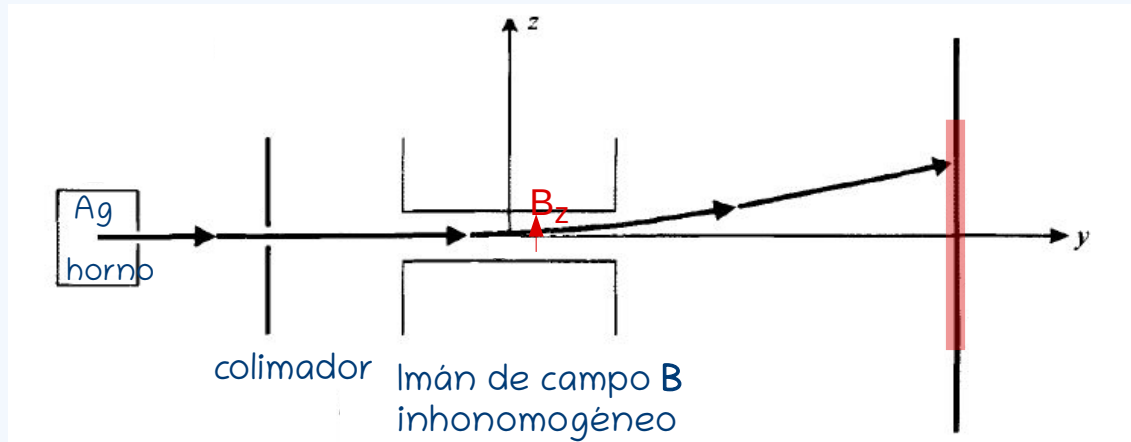
Fuerza en campo magnético no uniforme : $\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{M} \cdot \vec{B})$

$$= \vec{\nabla} (M_x B_x + M_z B_z)$$

$$B_y = 0$$

La componente M_x describe una rápida oscilación y se puede despreciar al evaluar el movimiento de los átomos de plata.

 $\mathbf{F} \approx M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$ $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$ En el centro del imán



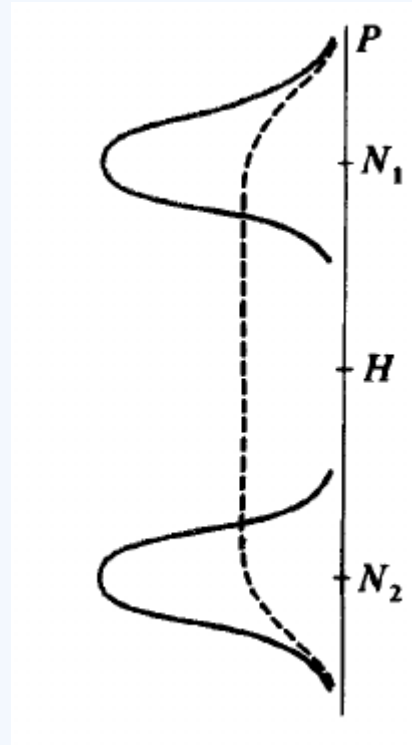
Los átomos de plata impactan en la pantalla y dejan una marca (medición de posición).

¿Qué resultado esperamos clásicamente?

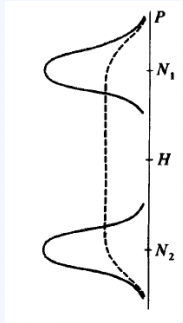
La fuerza $\mathbf{F} \approx M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$ produce una deflexión proporcional a M_z .

Como los \mathbf{M} vienen con una distribución isotrópica, tendríamos un rango completo entre $-|M_z|$ y $|M_z|$ y entonces esperamos una **mancha continua centrada**.

Resultado experimental:



Marcas observadas en la pantalla.
(El ancho depende de detalles experimentales.)



Interpretación cuántica : S_z es una cantidad cuantizada que solo puede tomar dos valores: $\pm \frac{\hbar}{2}$.

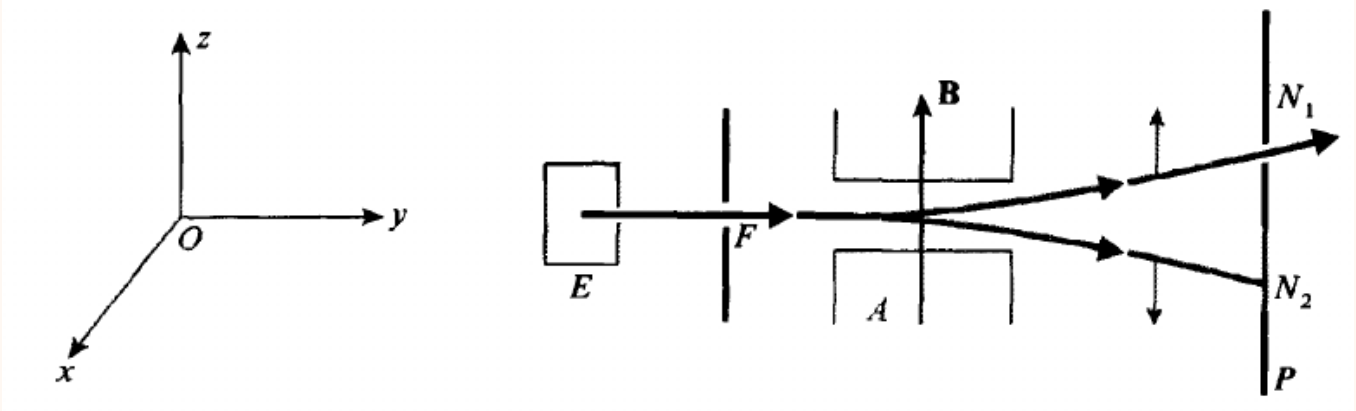
La descripción completa del estado de la partícula requiere dos partes en la función de onda:

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}+ | \psi \rangle \\ \langle \vec{r}- | \psi \rangle \end{pmatrix}$$

Preparación de estados de espín:

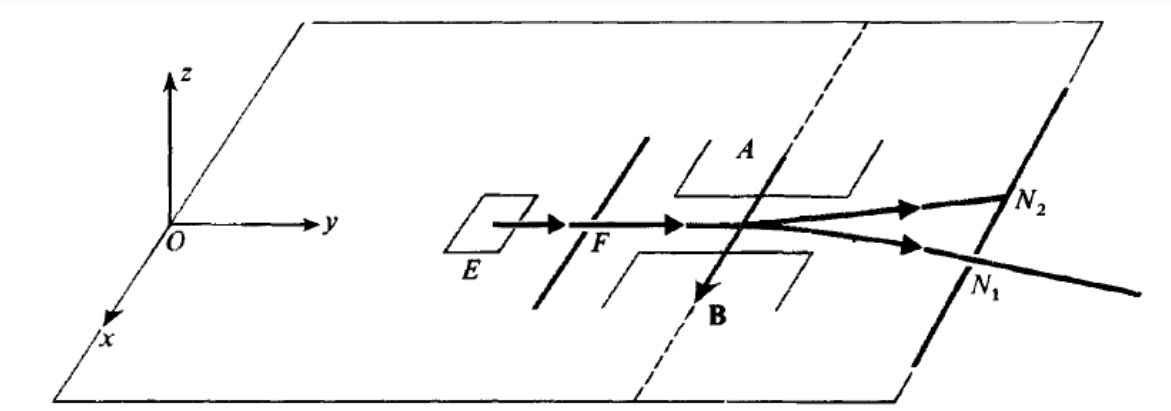
El aparato de Stern-Gerlach como polarizador

Preparación de estados de espín:
El aparato de Stern-Gerlach como polarizador



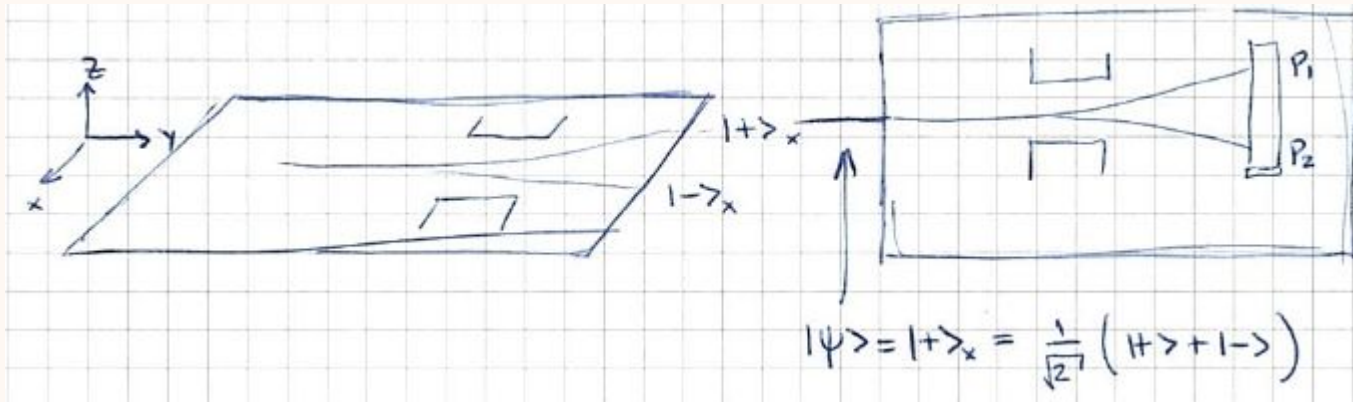
$|+\rangle$

Girando el aparato podemos obtener: $|\pm\rangle_x, |\pm\rangle_y, |\pm\rangle_u$



Preparación de estados de espín:
El aparato de Stern-Gerlach como polarizador

Si rotamos el aparato 90° ($\theta = \frac{\pi}{2}$)
podemos obtener átomos con
estado de espín $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$



Obtenemos marcas en P_1 y P_2 con prob. $\frac{1}{2}$

Teníamos estados generales, autoestados de S_u :

$$|+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle$$
$$|-\rangle_u = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} |+\rangle - \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |-\rangle$$

Si rotamos el primer setup un ángulo θ y obtenemos :

Ag con estado $|+\rangle_u = |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} |-\rangle$

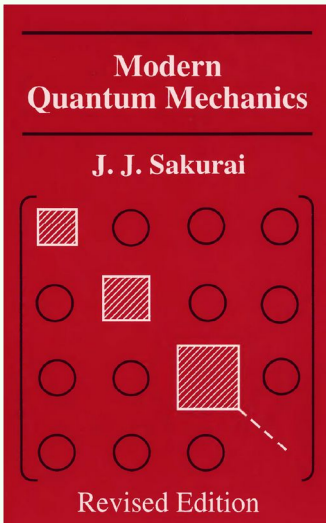
Al medir en la pantalla P obtenemos

$$\mathcal{P}(P_1) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\mathcal{P}(P_2) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

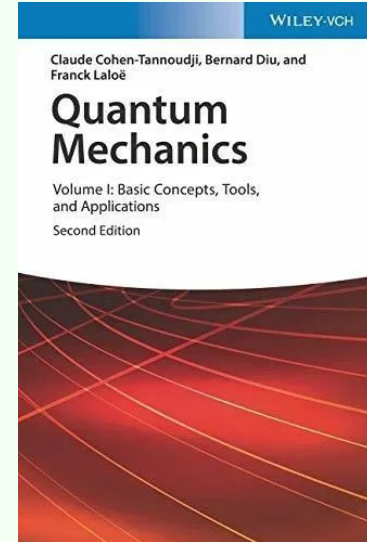


Rotaciones



J. J. Sakurai 1933–1982

| | |
|--|-----|
| 3 THEORY OF ANGULAR MOMENTUM | 152 |
| 3.1 Rotations and Angular Momentum Commutation Relations | 152 |



Complement B_{VI}
ANGULAR MOMENTUM AND ROTATIONS

Rotaciones

R : transformación en espacio 3D

conserva

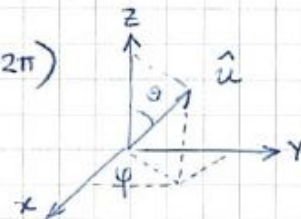
- un punto : origen O
- ángulos
- distancias
- handedness

Eje de rotación : $\hat{u} = (s\theta \cos \varphi, s\theta \sin \varphi, c\theta)$

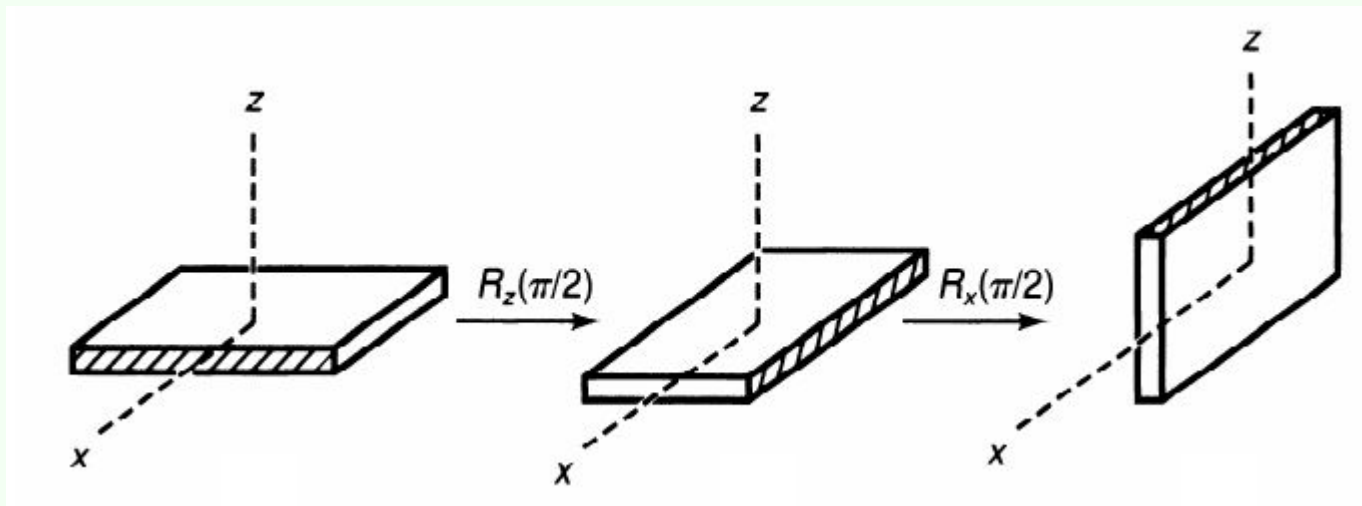
Ángulo de rotación : α ($0 \leq \alpha < 2\pi$)

$\vec{\alpha} = \alpha \hat{u}$ (3 parámetros)

→ notación : rotación $R_{\hat{u}}(\alpha)$



Ejemplos



Conjunto de rotaciones forma un grupo:

- $R_{\hat{u}}(\alpha) R_{\hat{u}'}(\alpha')$ es una rotación
- Hay identidad
- Hay inverso: $R_{\hat{u}}(\alpha) \rightarrow R_{-\hat{u}}(\alpha)$
- No conmutativo: $R_{\hat{u}}(\alpha) R_{\hat{u}'}(\alpha') \neq R_{\hat{u}'}(\alpha') R_{\hat{u}}(\alpha)$
en general

a menos que el eje de rotación sea el mismo

$$R_{\hat{u}}(\alpha) R_{\hat{u}}(\alpha') = R_{\hat{u}}(\alpha + \alpha') = R_{\hat{u}}(\alpha') R_{\hat{u}}(\alpha)$$

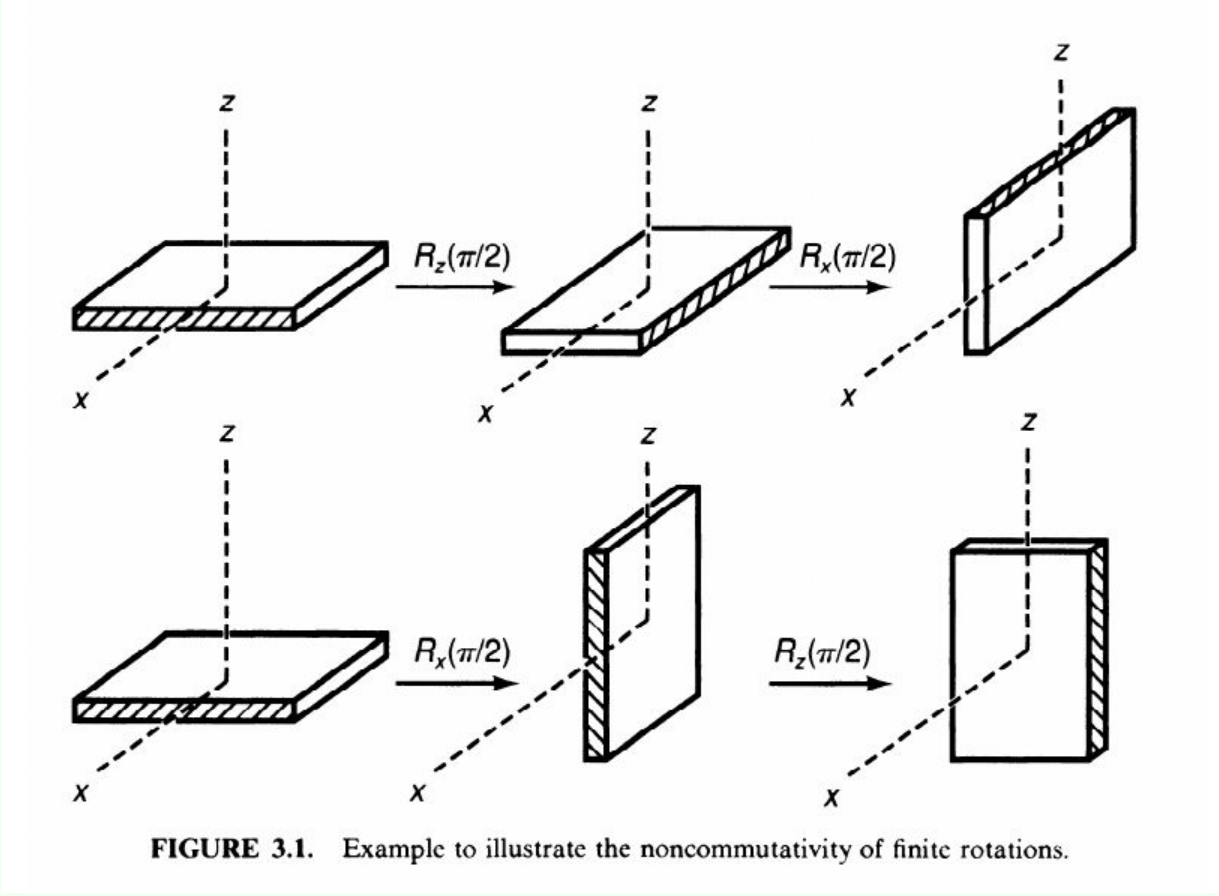
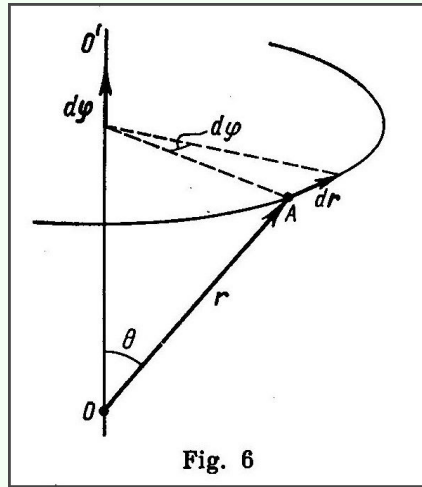


FIGURE 3.1. Example to illustrate the noncommutativity of finite rotations.

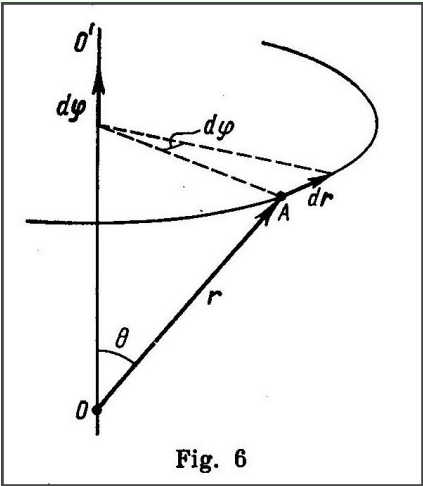
Rotaciones infinitesimales: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)$



- Una rotación finita puede ser descompuesta en infinitas rotaciones infinitesimales porque:

$$\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha + d\alpha) = \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha) \mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha) = \mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha) \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)$$

Rotaciones infinitesimales: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)$



- Rotación infinitesimal de un vector \vec{V}
- $$\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha) \vec{V} = \vec{V} + d\alpha \hat{u} \times \vec{V}$$

Rotaciones infinitesimales: $\mathcal{R}_{\hat{a}}(d\alpha)$

• Relación útil:

$$\mathcal{R}_{\hat{y}}(-d\alpha') \mathcal{R}_{\hat{x}}(d\alpha) \mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha') \mathcal{R}_{\hat{x}}(d\alpha) = \mathcal{R}_{\hat{z}}(d\alpha d\alpha')$$

correcta hasta segundo orden
primer orden en $d\alpha$ y $d\alpha'$

Operadores de rotación en el espacio de estados

Consideremos una partícula sin espín en espacio 3D

Sea estado de la partícula $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_r \longrightarrow \psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle \in \mathcal{F}$

Sea una rotación en el espacio: \mathcal{R}

Queremos ver como se aplica esta rotación a los estados y operadores cuánticos.

Operadores de rotación en el espacio de estados

Cada punto \mathbf{r}_0 se transforma con la rotación en:

$$\mathbf{r}'_0 = \mathcal{R} \mathbf{r}_0$$

Tenemos el ket rotado: $|\psi'\rangle \longrightarrow \psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi' \rangle$

Hay que modificar la función de onda de modo que:

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{r}'_0) &= \psi(\mathbf{r}_0) \\ &= \psi(\mathcal{R}^{-1} \mathbf{r}'_0) \end{aligned}$$

Operadores de rotación en el espacio de estados

$$\mathcal{R} \longrightarrow R \quad \text{Operador rotación}$$

$$\left. \begin{aligned} |\psi'\rangle &= R |\psi\rangle \\ \psi'(\mathbf{r}) &= \psi(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \langle \mathbf{r} | R | \psi \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1}\mathbf{r} | \psi \rangle$$

En efecto: $\langle \mathbf{r} | R | \psi \rangle = \langle \mathbf{r} | \psi' \rangle = \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}) = \langle \mathcal{R}^{-1}\mathbf{r} | \psi \rangle$

Resumen de la Clase 14

En esta clase vimos:

- Experimento de Stern-Gerlach
- Preparación de estados de espín
- Rotaciones