Clase 15 - Martes 19/10/2021

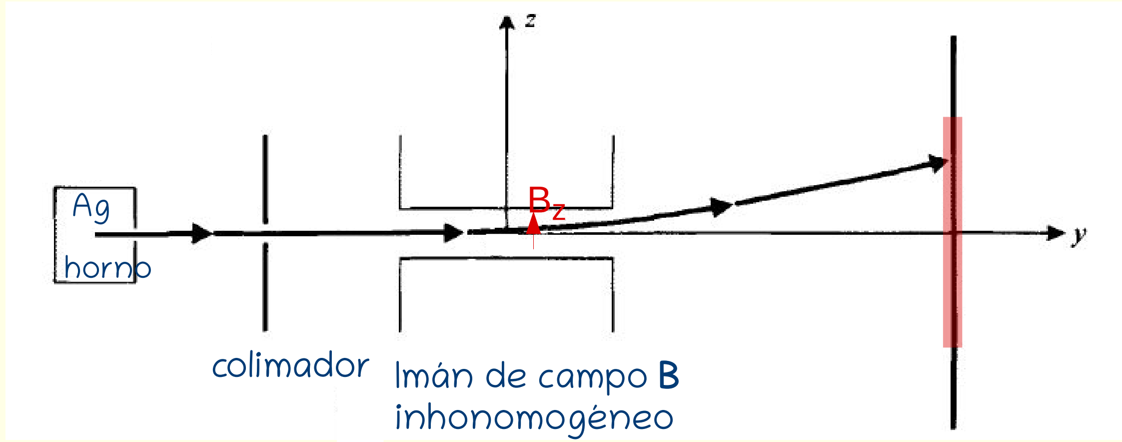
La clase pasada vimos:

- Experimento de Stern-Gerlach
- Preparación de estados de espín
- Bibliografía para rotaciones y momento angular

En esta clase veremos:

- Rotaciones geométricas
- Operador de rotación en el espacio de estados
- Propiedades del operador de rotación
- Operador de rotación y el momento angular

REPASO



Los átomos de plata impactan en la pantalla y dejan una marca (medición de posición).

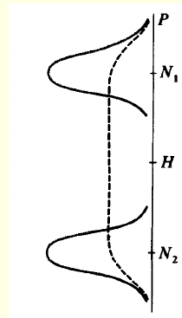
¿Qué resultado esperamos clásicamente?

La fuerza $\mathbf{F} \approx M_z \dfrac{\partial B_z}{\partial z}\hat{z}$ produce una deflexión proporcional a M_z.

Como los **M** vienen con una distribución isótropa, tendríamos un rango completo de M_z y clásicamente esperaríamos una mancha centrada y continua.

REPASO

Resultado experimental:

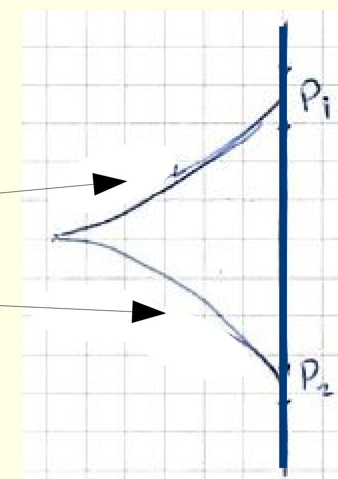


Interpretación cuántica: S_z es una cantidad cuantizada que solo puede tomar dos valores: $\pm \frac{\hbar}{2}$.
La descripción completa del estado de la partícula requiere dos partes en la función de onda:

Espinor para particula de espin ½

$$[\psi](\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{r}+|\psi\rangle \\ \langle \vec{r}-|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_+(\vec{r}) \text{ describe una trayectoria} \\ \psi_-(\vec{r}) \quad '' \quad '' \quad '' \end{cases}$$

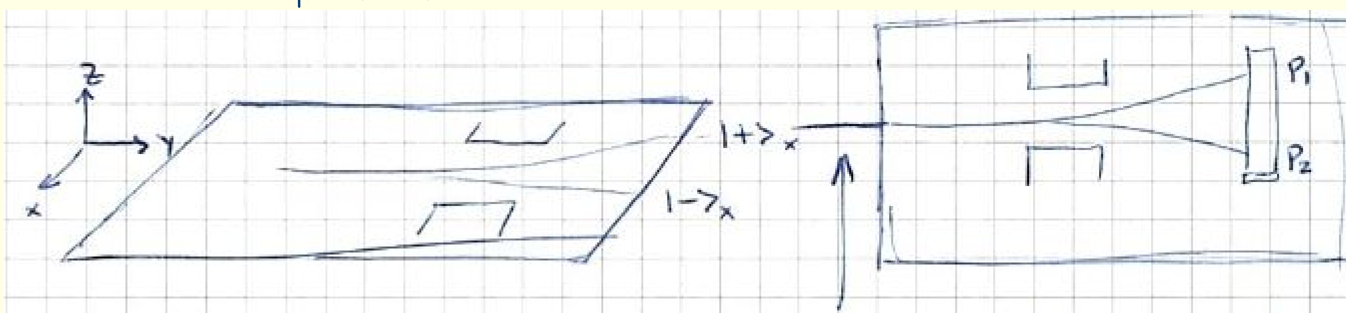


REPASO

Si rotamos el aparato 90° $(\theta = \frac{\pi}{2})$ podemos oblener átomos con estado de espín $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$

Preparación y medición del estado de espín:

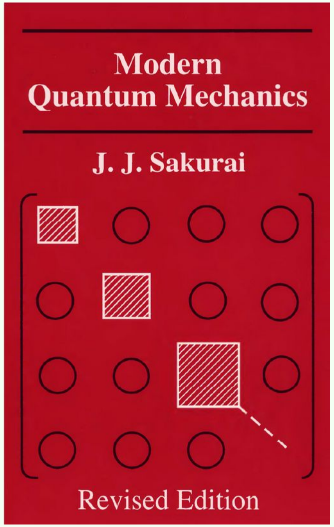
"polarizador" "analizador"



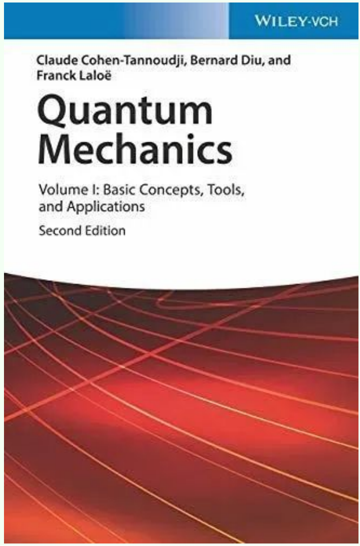
$$|\psi\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

Obtenemos marcas en P_1 y P_2 con prob. $\frac{1}{2}$

Rotaciones y momento angular



J. J. Sakurai 1933–1982

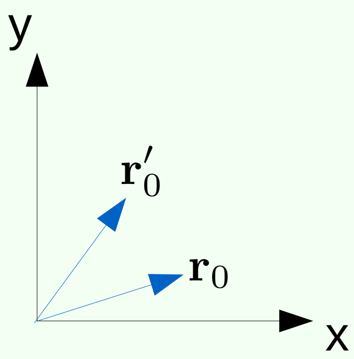


Complement B_{VI}

ANGULAR MOMENTUM AND ROTATIONS

Rotaciones geométricas

Rotaciones geométricas



Rotación de un vector alrededor del eje z:

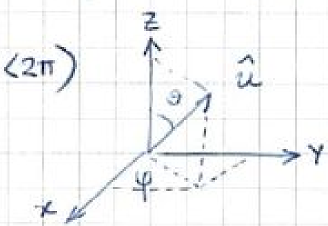
$\mathcal{R}$: transformación en espacio 3D

conserva
- un punto : origen O
- ángulos
- distancias
- handedness

Eje de rotación : $\hat{u} = (s\theta\, c\varphi,\ s\theta\, s\varphi,\ c\theta)$

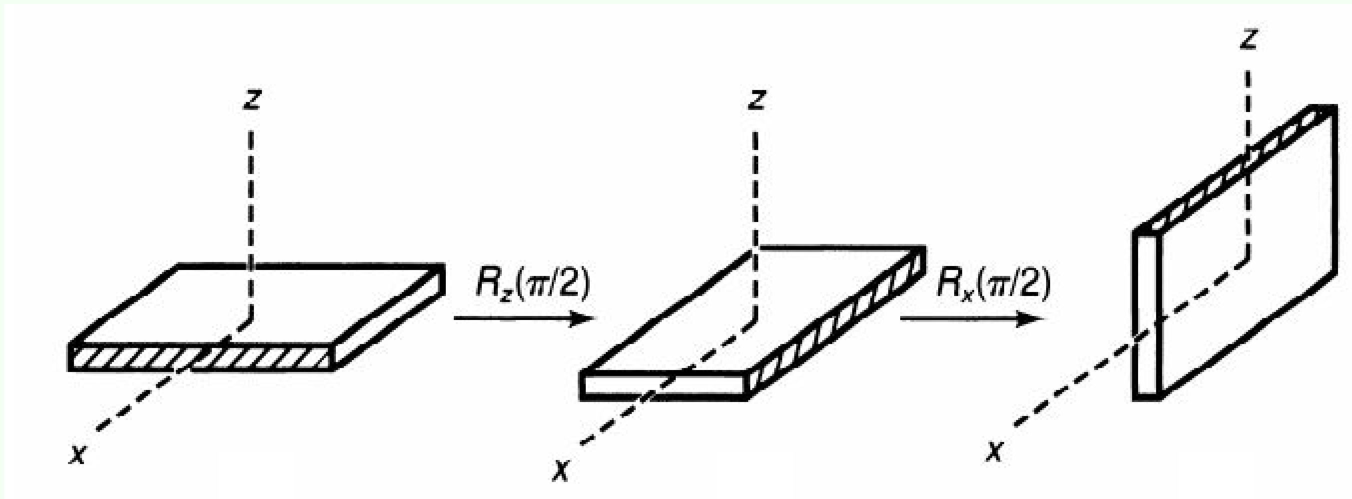
Ángulo de rotación : α $(0 \leq \alpha < 2\pi)$

$\vec{\alpha} = \alpha\, \hat{u}$ (3 parámetros)

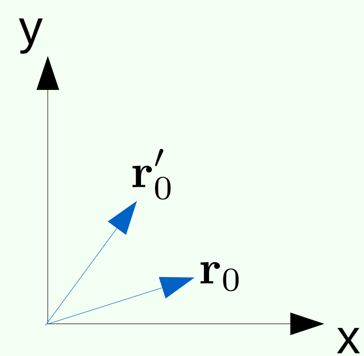


→ notación : rotación $\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)$

Ejemplos de rotaciones de un objeto:



Rotación de un vector alrededor del eje z:



Propiedad de las rotaciones

Conjunto de rotaciones forma un grupo:

- $\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)\,\mathcal{R}_{\hat{u}'}(\alpha')$ es una rotación
- Hay identidad
- Hay inverso: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{R}_{-\hat{u}}(\alpha)$
- No conmutativo: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)\,\mathcal{R}_{\hat{u}'}(\alpha') \neq \mathcal{R}_{\hat{u}'}(\alpha')\,\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)$
  en general

a menos que el eje de rotación sea el mismo

$$\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)\,\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha') = \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha+\alpha') = \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha')\,\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)$$

No-conmutatividad de las rotaciónes - ejemplo:

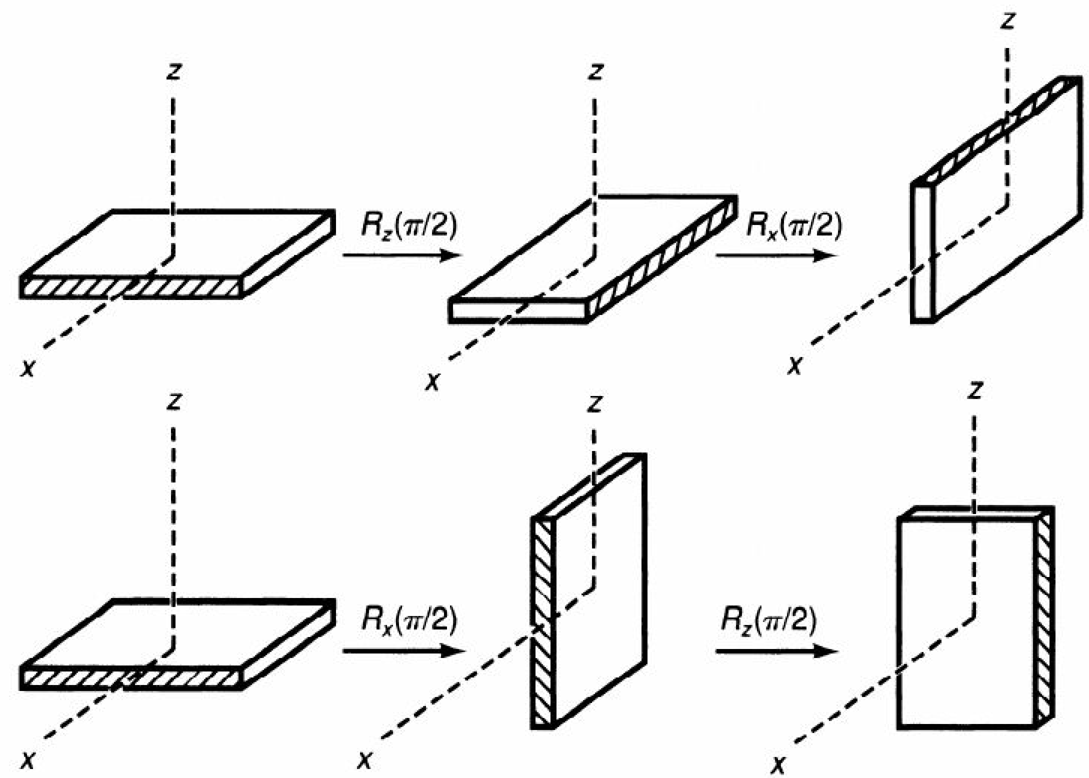
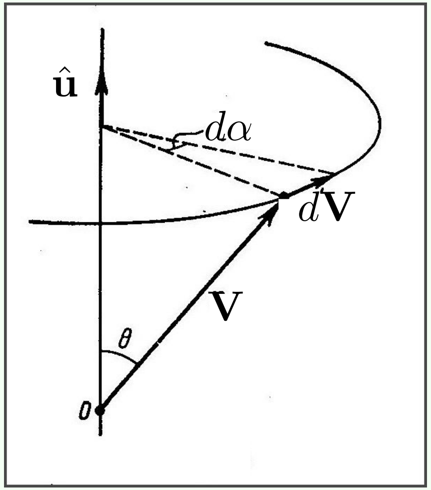


FIGURE 3.1. Example to illustrate the noncommutativity of finite rotations.

Fuente: Sakurai

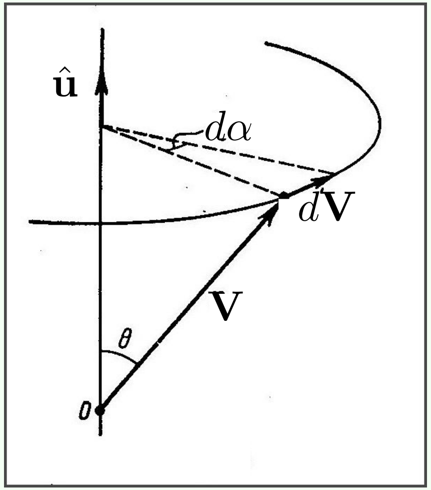
Rotaciones infinitesimales: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)$



- Una rotación finita puede ser descompuesta en infinitas rotaciones infinitesimales porque:

$$\mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha + d\alpha) = \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)\, \mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha) = \mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)\, \mathcal{R}_{\hat{u}}(\alpha)$$

Rotaciones infinitesimales: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)$



- Rotación infinitesimal de un vector $\vec{V}$

$$\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)\,\vec{V} = \vec{V} + d\alpha\,\hat{u}\times\vec{V}$$

Operadores de rotación en el espacio de estados cuánticos

Operadores de rotación en el espacio de estados

Consideremos una partícula **sin espin** en el espacio 3D

Sea estado de la partícula $|\psi\rangle \in \mathcal{E}_{\mathbf{r}} \longrightarrow \psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\psi\rangle \in \mathcal{F}$

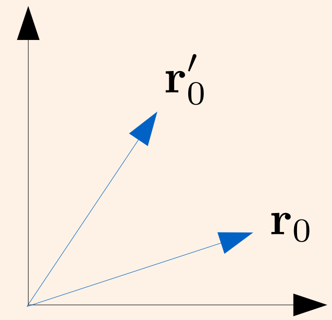
Sea una rotación geométrica en el espacio: $\mathcal{R}$

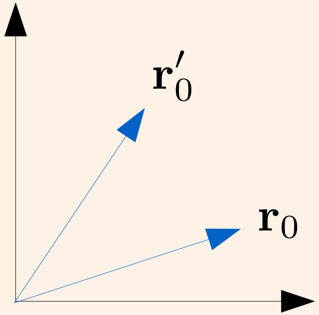
Queremos ver como se aplica esta rotación a los estados y operadores cuánticos.

Operadores de rotación en el espacio de estados

Cada punto $\mathbf{r}_0$ del espacio se transforma con la rotación en:

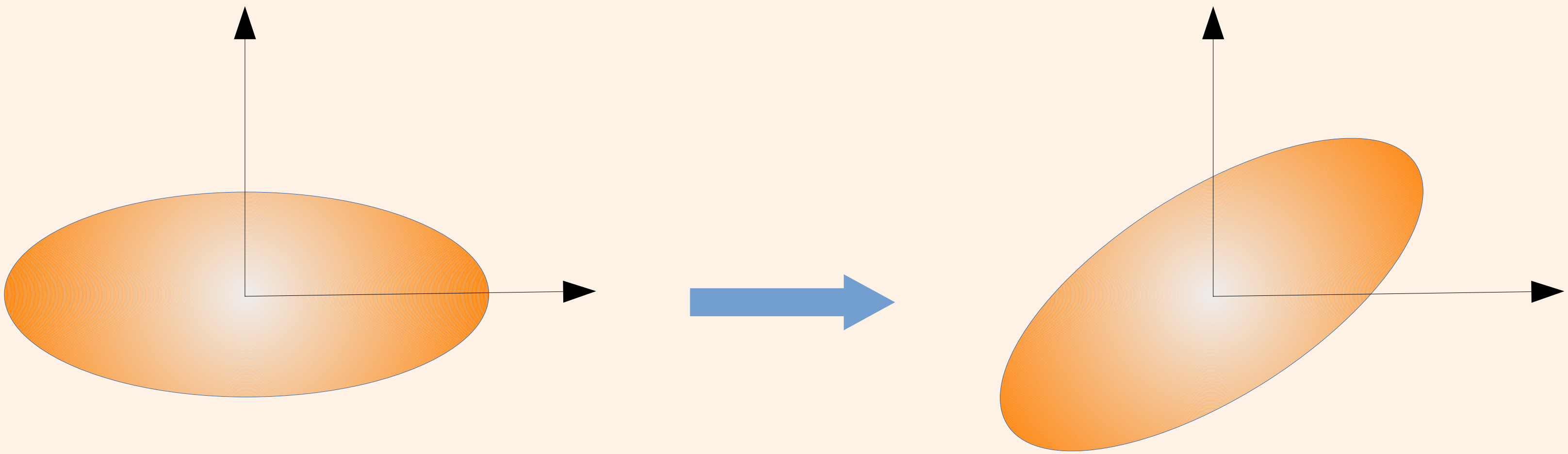
$$\mathbf{r}'_0 = \mathscr{R}\,\mathbf{r}_0$$



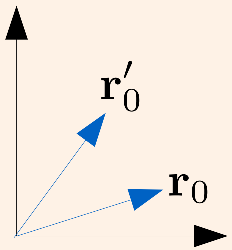


Operadores de rotación en el espacio de estados

Rotación de la función de onda:



Operadores de rotación en el espacio de estados



Cada punto $\mathbf{r}_0$ se transforma con la rotación en:

$$\mathbf{r}'_0 = \mathscr{R}\,\mathbf{r}_0$$

Llamemos el ket rotado : $|\psi'\rangle \longrightarrow \psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r}\,|\,\psi'\rangle$

La idea es **definir la rotación del ket** a través de la rotación geométrica de la función de onda:

$$\psi'(\mathbf{r}'_0) = \psi(\mathbf{r}_0)$$
$$= \psi(\mathscr{R}^{-1}\mathbf{r}'_0)$$

Operadores de rotación en el espacio de estados

$\mathscr{R} \longrightarrow R$ Operador rotación

$$\left.\begin{array}{l} |\psi'\rangle = R|\psi\rangle \\ \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathscr{R}^{-1}\mathbf{r}) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{r}|R|\psi\rangle = \langle \mathscr{R}^{-1}\mathbf{r}|\psi\rangle$$

En efecto: $\langle \mathbf{r}|R|\psi\rangle = \langle \mathbf{r}|\psi'\rangle = \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}) = \langle \mathcal{R}^{-1}\mathbf{r}|\psi\rangle$

Propiedades del operador de rotación R

Propiedades del operador de rotación R

Propiedades del operador R

- R es un operador lineal

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{r} | R | \psi \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathcal{R}^{-2} \vec{r} | \psi_2 \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle \vec{r} | R | \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \vec{r} | R | \psi_2 \rangle$$

$$\Rightarrow R|\psi\rangle = \lambda_1 R|\psi_1\rangle + \lambda_2 R|\psi_2\rangle \quad \checkmark$$

- R es unitario

$$\langle \vec{r} | R | \psi \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \psi \rangle \qquad \forall |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \vec{r} | R = \langle \mathcal{R}^{-1} \vec{r} | \quad \Rightarrow \quad R^{\dagger} | \vec{r} \rangle = | \mathcal{R}^{-1} \vec{r} \rangle$$

También, intuitivamente claro que $R|\vec{r}\rangle = |\mathcal{R}\vec{r}\rangle$

(Estado de partícula localizada en $\vec{r}\,' = \mathcal{R}\vec{r}$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad R R^{\dagger} | \vec{r} \rangle = R | \mathcal{R}^{-1} \vec{r} \rangle = | \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} \vec{r} \rangle = | \vec{r} \rangle \quad \Rightarrow \quad R R^{\dagger} = \mathbb{1}$$

Como todo operador unitario, R conserva el producto escalar:

$$\left.\begin{array}{l} |\psi'\rangle = R|\psi\rangle \\ |\varphi'\rangle = R|\varphi\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \langle\varphi'|\psi'\rangle = \langle\varphi|R^{+}R|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle$$

Propiedades del operador de rotación R

- Los operadores R son una "representación" del grupo de rotaciones geométricas.

Si $\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3$

Entonces $R_2 R_1 = R_3$

La correspondencia $\mathcal{R} \longrightarrow R$ conserva la estructura de grupo. Decimos: ops. R son representación del grupo de rotaciones $\mathcal{R}$

Operador de rotación y el momento angular

Sea rotación $\mathcal{R}_{\hat{z}}(d\alpha)$

Tenemos: $\psi'(\vec{r}) = \psi\left(\mathcal{R}_{z}^{-1}(d\alpha)\,\vec{r}\right)$

Teníamos: $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)\,\vec{V} = \vec{V} + d\alpha\,\hat{u}\times\vec{V}$

$$\mathcal{R}_{z}^{-1}(d\alpha)\,\vec{r} = \mathcal{R}_{-\hat{z}}(d\alpha)\,\vec{r} = \vec{r} - d\alpha\,\hat{z}\times\vec{r}$$

$$= (x + y\,d\alpha,\ y - x\,d\alpha,\ z)$$

$$-\hat{z}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = +\hat{i}\,y - \hat{j}\,x$$

$$\psi'(\vec{r}) = \psi\left(R_z^{-1}(d\alpha)\,\vec{r}\right)$$

$$\Rightarrow \psi'(x,y,z) = \psi\left(x + y\,d\alpha\,,\; y - x\,d\alpha\,,\; z\right)$$

A primer orden en $d\alpha$:

$$\psi'(x,y,z) = \psi(x,y,z) + d\alpha\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$= \psi(x,y,z) - \frac{i}{\hbar}\,d\alpha\,\underbrace{\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{L_z}\psi$$

$$\psi(x,y,z) - \frac{i}{\hbar} d\alpha \underbrace{\frac{\hbar}{i}\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)}_{L_z} \psi$$

$$\Rightarrow \psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi' \rangle = \langle \vec{r} | 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha L_z | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow |\psi'\rangle = R_{\hat{z}}(d\alpha) |\psi\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha L_z\right) |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow R_{\hat{z}}(d\alpha) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha L_z$$

Para una dirección $\hat{u}$ arbitraria:

$$R_{\hat{u}}(d\alpha) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{L} \cdot \hat{u}$$

- Relación útil:

$$R_{\hat{y}}(-d\alpha')\, R_{\hat{x}}(d\alpha)\, R_{\hat{y}}(d\alpha')\, R_{\hat{x}}(-d\alpha) = R_{\hat{z}}(d\alpha\, d\alpha')$$

correcta hasta segundo orden
primer orden en $d\alpha$ y $d\alpha'$

$$\mathscr{R}_{\mathbf{e}_y}(-\,d\alpha')\,\mathscr{R}_{\mathbf{e}_x}(d\alpha)\,\mathscr{R}_{\mathbf{e}_y}(d\alpha')\,\mathscr{R}_{\mathbf{e}_x}(-\,d\alpha) = \mathscr{R}_{\mathbf{e}_z}(d\alpha\, d\alpha')$$

$$\left[1 + \frac{i}{\hbar}\, d\alpha' L_y\right]\left[1 - \frac{i}{\hbar}\, d\alpha L_x\right]\left[1 - \frac{i}{\hbar}\, d\alpha' L_y\right]\left[1 + \frac{i}{\hbar}\, d\alpha L_x\right] = 1 - \frac{i}{\hbar}\, d\alpha\, d\alpha' L_z$$

$$\Longrightarrow \quad i\hbar L_z = \left[L_x, L_y\right]$$

Las reglas de conmutación de momento angular son una manifestación de la estructura no-conmutativa del grupo de rotaciones geométricas.

Operadores de rotaciones finitas

Siendo alrededor del mismo eje $\hat{z}$:

$$R_{\hat{z}}(\alpha + d\alpha) = R_{\hat{z}}(\alpha)\, R_{\hat{z}}(d\alpha)$$

$$= R_z(\alpha)\left(1 - \frac{i}{\hbar}\, d\alpha\, L_z\right)$$

$$\Rightarrow R_z(\alpha + d\alpha) - R_z(\alpha) = -\frac{i}{\hbar}\, d\alpha\, R_z(\alpha)\, L_z$$

$$\Rightarrow \frac{d R_z(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{i}{\hbar}\, R_z(\alpha)\, L_z$$

Solución: $R_z(\alpha) = e^{-i\alpha L_z/\hbar}$

En general: $R_{\hat{u}}(\alpha) = e^{-i\alpha \vec{L}\cdot\hat{u}/\hbar}$

Resumen de la Clase 15

En esta clase vimos:

- Rotaciones geométricas
- Operador de rotación en el espacio de estados
- Propiedades del operador de rotación
- Operador de rotación y el momento angular