# Clase 17 - Viernes 29/10/2021

La clase pasada vimos:

- Suma de momentos angulares: introducción
- Ejemplo importante: suma de dos espines ½
- Solución por diagonalización

**En esta clase veremos:**

- Dos ejemplos breves de H con dos espines
- Suma de momentos angulares: motivación del método general
- Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Planteo
- Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Solución
- Coeficientes Clebsch-Gordan

REPASO

## Suma de dos espines 1/2

Espacio de Hilbert total: $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_{S_1} \otimes \mathcal{E}_{S_2}$

La “base producto” de este espacio de Hilbert es:

$$\{ \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle \, \} = \{ \, | +, + \rangle \, , | +, - \rangle \, , | -, + \rangle \, , | -, - \rangle \, \}$$

que son los autovectores comunes del CCOC: $\mathbf{S}_1^2, \, S_{1z}, \, \mathbf{S}_2^2, \, S_{2z}$

$$\mathbf{S}_1^2 \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \mathbf{S}_2^2 \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

$$S_{1z} \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \varepsilon_1 \frac{\hbar}{2} \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

$$S_{2z} \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \varepsilon_2 \frac{\hbar}{2} \, | \, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

REPASO

- Queremos pasar de $\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$

a $\{S_1^2, S_2^2, \boxed{S^2, S_z}\}$

En realidad alcanza con tomar como C.C.O.C.

a $\{S_{1z}, S_{2z}\}$ o $\{S^2, S_z\}$

REPASO

$$\mathbf{S}_1^2 \,|\, S, M \rangle = \mathbf{S}_2^2 \,|\, S, M \rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \,|\, S, M \rangle$$

$$\mathbf{S}^2 \,|\, S, M \rangle = S(S+1)\hbar^2 \,|\, S, M \rangle$$

$$S_z \,|\, S, M \rangle = M\hbar \,|\, S, M \rangle$$

"Base acoplada"

S puede ser **entero** o **semientero** y M = -S, -S+1, -S+2, … , S-1, S

**REPASO**

$$(S_z) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ en la base $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle\}$

La matriz de $S_z$ ya está diagonalizada en la base producto y tiene autovalores: $M \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \rightarrow 0 \\ \searrow -1 \end{array}$

$$(S^2) = \left[\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \hbar^2$$

REPASO

$$\mathbf{S}_1^2 \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \mathbf{S}_2^2 \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

$$S_{1z} \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \varepsilon_1 \frac{\hbar}{2} \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

$$S_{2z} \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \varepsilon_2 \frac{\hbar}{2} \,|\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$

"Base producto"

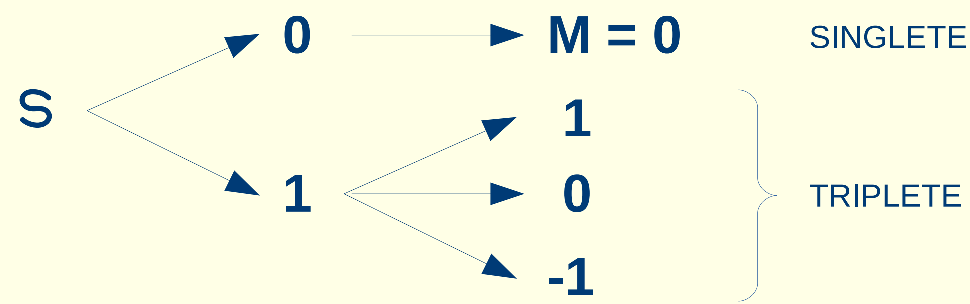
$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm$$

$$\mathbf{S}_1^2 \,|\, S, M \rangle = \mathbf{S}_2^2 \,|\, S, M \rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \,|\, S, M \rangle$$

$$\mathbf{S}^2 \,|\, S, M \rangle = S(S+1)\hbar^2 \,|\, S, M \rangle$$

$$S_z \,|\, S, M \rangle = M\hbar \,|\, S, M \rangle$$

"Base acoplada"




$$\{|S, M\rangle\} = \{|1,1\rangle, \underbrace{|1,0\rangle, |0,0\rangle}_{M=0}, |1,-1\rangle\}$$

# Dos ejemplos breves de H con dos espines

Ejemplos

(1) $H = -(\gamma_1 \vec{S}_1 + \gamma_2 \vec{S}_2) \cdot \vec{B}$ Campo magnético externo

$\vec{B} = B_0 \hat{z} \Rightarrow H = -(\gamma_1 S_{1z} + \gamma_2 S_{2z}) B_0$

Conviene la base $\{|m_1 m_2\rangle\}$ de estados producto porque diagonaliza $H$.

(2) Interacción hiperfina (entre protón y electrón)

$$H = A\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} A \left( S^2 - S_1^2 - S_2^2 \right)$$

La base $\{|S, M\rangle\}$ de espín total diagonaliza $H$.

# Suma de momentos angulares:

## Motivación del método general

Vimos en el problema de suma de dos espines que:

Suma de MA $\longleftrightarrow$ cambio de base:

$$\{S_{1z}, S_{2z}\} \rightarrow \{S^2, S_z\}$$

$$|SM\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | SM\rangle \; |m_1 m_2\rangle$$

$$m_1, m_2 = \pm\frac{1}{2}$$

Simbólicamente : $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$

$\uparrow$ suma directa

$$\dim\left(\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\right) = (2S_1+1)(2S_2+1) = \left(2\times\frac{1}{2}+1\right)\left(2\times\frac{1}{2}+1\right) = 4$$

$$\dim(1\oplus 0) = \sum_{S=0}^{1}(2S+1) = 1+3 = 4$$

Espacios con espín total bien definido

Organizamos los autoestados de $S^2$ y $S_z$ :

| $M \backslash S$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $\|1\ 1\rangle$ | |
| 0 | $\|1\ 0\rangle$ | $\|0\ 0\rangle$ |
| -1 | $\|1\ {-1}\rangle$ | |

Recordar que es siempre $M = m_1 + m_2$ y tenemos para el estado de arriba:

Idea clave:

$$|1\,1\rangle = |+\,+\rangle$$

Obtenemos $|1\,0\rangle$ aplicando $S_-$ :

$$S_-|1\,1\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\,|1\,0\rangle$$

$$\Rightarrow |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\hbar} S_-|1\,1\rangle$$

$$|1\,1\rangle = |+\,+\rangle$$

Obtenemos $|1\,0\rangle$ aplicando $S_-$ : $|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar} S_-|1\,1\rangle$

Por otro lado podemos hacer:

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}(S_{1-} + S_{2-})|+\,+\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left(\hbar\,|-\,+\rangle + \hbar\,|+\,-\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-\,+\rangle + |+\,-\rangle\right)$$

Conclusión: Por otro camino obtuvimos el estado de la base acoplada en función de estados de la base desacoplada.

y aplicando $S_-$ de nuevo obtenemos $|1\,-1\rangle$

# Suma de momentos angulares: Motivación del método general

El primer estado de la segunda columna, $|00\rangle$ tiene $S=0 \Rightarrow M=0$

Como $M = m_1 + m_2$, estado debe ser comb. lineal de $|+-\rangle$ y $|-+\rangle$, y debe ser $\perp$ al otro estado con $M=0$.

$$\Rightarrow |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$

| M \ S | 1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $|1\,1\rangle$ | |
| 0 | $|1\,0\rangle$ | $|0\,0\rangle$ |
| -1 | $|1\,-1\rangle$ | |

# Suma de momentos angulares:

## Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Planteo

Mini repaso de un momento angular general:

$$J^2 |j\,m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j\,m\rangle$$

$$J_z |j\,m\rangle = m\hbar |j\,m\rangle$$

$$J_\pm |j\,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\; |j, m\pm 1\rangle$$

Espacio vectorial $\mathcal{E}(j)$ : $\{ |j,m\rangle,\ m=-j, -j+1, \ldots, j \}$

$\dim \mathcal{E}(j) = 2j+1$

El espacio $\mathcal{E}(j)$ es invariante frente a la acción de los operadores $J^2$, $J_z$, $J_\pm$ (no cambian $j$)

Por ejemplo, en el átomo de hidrogeno, en la capa $n = 3$

son posibles los valores $\ell = 0, 1, 2$

Entonces, el subespacio asociado a $n = 3$ tiene dimensión:

$$\sum_{\ell=0}^{2}(2\ell + 1) = (2 \times 0 + 1) + (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1)$$
$$= 1 + 3 + 5 = 9$$

Las dimensiones de los subespacios $\mathcal{E}_{n=3}(\ell)$ se suman.

Decimos: $\mathcal{E}_{n=3} = \mathcal{E}_{n=3}(\ell = 0) \oplus \mathcal{E}_{n=3}(\ell = 1) \oplus \mathcal{E}_{n=3}(\ell = 2)$

Es una *suma directa* de espacios (o subespacios)

Consideremos dos momentos angulares $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$

**Ejemplos:**

Para una partícula:

**J**$_1$ = **L**

**J**$_2$ = **S**

Para dos partículas:

**J**$_1$ = **S**$_1$

**J**$_2$ = **S**$_2$

Para cada momento angular tenemos:

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}J_{1k} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_1^2|j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, m_1\rangle \\ J_{1z}|j_1, m_1\rangle = m_1\hbar\,|j_1, m_1\rangle \end{array} \right.$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}J_{2k} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_2^2|j_2, m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2|j_2, m_2\rangle \\ J_{2z}|j_2, m_2\rangle = m_2\hbar\,|j_2, m_2\rangle \end{array} \right.$$

El espacio producto donde viven los dos momentos angulares está generado por estados

$$|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$$

Estos son los autoestados comunes del C.C.O.C. $\{J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}\}$

Acorde con el hecho que: $[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0$

Hay otra opción de C.C.O.C. conveniente: $\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\}$

Para esto habría que chequear que:

$$[J^2, J_1^2] = 0 \qquad [J_z, J_1^2] = 0$$

$$[J^2, J_2^2] = 0 \qquad [J_z, J_2^2] = 0$$

Los denotamos $|j_1 j_2 ; j m\rangle$ .

Satisfacen:

$$J_1^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_1 (j_1+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_2^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_2 (j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j (j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle$$

¿Cómo se relacionan $\{|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\}$ y $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$ ?

# Caso general $\mathbf{J_1+J_2}$

¿Cómo se relacionan $\{|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\}$ y $\{|j_1 j_2 j m\rangle\}$ ?

Usando relación de clausura para los $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \Rightarrow$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle}_{\text{coeficientes Clebsch-Gordan}} .$$

Propiedad principal:

1) $m = m_1 + m_2$

2) $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

Caso general $\mathbf{J}_1$+$\mathbf{J}_2$

Propiedad principal:

1) $m = m_1 + m_2$

2) $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

Veamos 1)

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$\langle j_1 j_2 \; m_1 m_2 | \underbrace{J_z - J_{1z} - J_{2z}}_{=0} | j_1 j_2 j m\rangle = 0$$

$$(m - m_1 - m_2) \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \text{si } m \neq m_1 + m_2 \Rightarrow \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = 0$$

# Suma de momentos angulares:

## Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Solución

## Caso general : $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$

Estados producto : $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

Son autoestados de $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ :

$$J_z |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle = \hbar\,\underbrace{(m_1 + m_2)}_{m}\,|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

En general hay varias combinaciones de $m_1$ y $m_2$ que dan $m = m_1 + m_2$, excepto para $m = j_1 + j_2$ y $m = -(j_1 + j_2)$.

En los extremos de $m_1$ y $m_2$ tenemos:

$$m = j_1 + j_2 \quad y \quad m = -(j_1 + j_2)$$

Para los m distintos a estos casos:

Hay degeneración como en el caso $M=0$ que vimos en la suma de espines $\frac{1}{2}$.

Podríamos escribir $\vec{J}^2$ y diagonalizar, pero no es práctico.

## Valores permitidos de $j$

Buscamos estados $|j_1 j_2 j m\rangle$ /

$$J^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle$$

Sup. $j_1 \geq j_2$ . Los posibles valores de $j$ son:

$$j = j_1 + j_2 ,\ j_1 + j_2 - 1 ,\ \ldots ,\ j_1 - j_2 + 1 ,\ j_1 - j_2$$

Por ejemplo: para $j_1 = j_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow j = 1, 0$

Proponemos: $j = j_1 - j_2,\, j_1 - j_2 + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1,\, j_1 + j_2,$

Verifiquemos que: $\dim\, (\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}) = \dim\, \sum_{\oplus} \mathcal{E}_j$

$$\dim\, (\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

Cambio de variable:
$j = j_1 - j_2 + i$

$$\dim\, \sum_{\oplus} \mathcal{E}_j = \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{i=0}^{2j_2} [2(j_1 - j_2 + i) + 1]$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= [2(j_1 - j_2) + 1] \sum_{i=0}^{2j_2} 1 + 2 \sum_{i=0}^{2j_2} i = [2(j_1 - j_2) + 1](2j_2 + 1) + 2j_2(2j_2 + 1)$$

$$= (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$$

$$\Rightarrow \; j_1 \otimes j_2 = (j_1 + j_2) \oplus (j_1 + j_2 - 1) \oplus \cdots \oplus (j_1 - j_2)$$

$$\Rightarrow \; |j_1 j_2 \, j m\rangle \quad \text{con} \quad j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j \leq m \leq j$$

| $m \backslash j$ | $j_1+j_2$ | $j_1+j_2-1$ | $\cdots$ | $j_1-j_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $j_1+j_2$ | $\lvert j_1+j_2, j_1+j_2\rangle$ 1 | | | |
| $j_1+j_2-1$ | $\lvert j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$ | $\lvert j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle$ | | |
| $j_1+j_2-2$ | $\lvert j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle$ | $\lvert j_1+j_2-1, j_1+j_2-2\rangle$ | | $\lvert j_1-j_2, j_1-j_2\rangle$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $-j_1-j_2+2$ | $\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2)+2\rangle$ | $\lvert j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)+1\rangle$ | | $\lvert j_1-j_2, -(j_1-j_2)$ |
| $-j_1-j_2+1$ | $\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2)+1\rangle$ | $\lvert j_1+j_2-1, -(j_1+j_2-1)\rangle$ | | |
| $-j_1-j_2$ | $\lvert j_1+j_2, -(j_1+j_2)$ | | | |

Empezamos con 1

$$|j_1 j_2, m_1 = j_1, m_2 = j_2\rangle$$

$$|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1, m_1 = j_1; j_2, m_2 = j_2\rangle$$

Bajamos en columna de $j = j_1 + j_2$ aplicando $J_-$:

$$J_- |\overset{j=}{j_1 + j_2}, \overset{m=}{j_1 + j_2}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) - (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 - 1)}\,|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

$$= \hbar\sqrt{2(j_1 + j_2)}\,|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle$$

y por otro lado:

$$|j_1+j_2\,,\,j_1+j_2-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}\,\hbar}\left(J_{1-}+J_{2-}\right)|j_1 j_1\,,\,j_2 j_2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}\,\hbar}\left(\hbar\sqrt{j_1(j_1+1)-j_1(j_1-1)}\;|j_1\,,\,j_1-1\,;\,j_2 j_2\rangle\right.$$

$$\left.+\,\hbar\sqrt{j_2(j_2+1)-j_2(j_2-1)}\;|j_1 j_1\,;\,j_2\,,\,j_2-1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2(j_1+j_2)}}\left(\sqrt{2j_1}\;|j_1\,,\,j_1-1\,;\,j_2 j_2\rangle + \sqrt{2j_2}\;|j_1 j_1\,;\,j_2\,j_2-1\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{j_1}{j_1+j_2}\right)^{1/2}|j_1\,j_1-1\,;\,j_2\,j_2\rangle + \left(\frac{j_2}{j_1+j_2}\right)^{1/2}|j_1 j_1\,;\,j_2\,,\,j_2-1\rangle$$

Y análogamente continuamos bajando por la columna de $j = j_1 + j_2$ (basta con bajar hasta $m = 0$).

Siguiente columna: $j = j_1 + j_2 - 1$

Estado de arriba: $m = j = j_1 + j_2 - 1$

$$\rightarrow \quad |j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 1\rangle$$

¿Qué estados producto necesitamos? Los que tengan $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1$

$$\rightarrow \quad |j = j_1 + j_2 - 1 \,,\, m = j_1 + j_2 - 1\rangle$$

¿Qué estados producto necesitamos? Los que tengan $\quad m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1$

$$|j_1 , m_1 = j_1 \,;\, j_2 , m_2 = j_2 - 1\rangle \,,\quad |j_1 , m_1 = j_1 - 1 \,;\, j_2 , m_2 = j_2\rangle$$

Como debe ser ortogonal a $|j = j_1 + j_2 \,,\, m = j_1 + j_2 - 1\rangle$ obtenemos :

$$|j_1 + j_2 - 1 \,,\, j_1 + j_2 - 1\rangle = \left(\frac{j_1}{j_1 + j_2}\right)^{1/2} |j_1, j_1 \,;\, j_2\, j_2 - 1\rangle$$

$$- \left(\frac{j_2}{j_1 + j_2}\right)^{1/2} |j_1, j_1 - 1 \,;\, j_2\, j_2\rangle$$

Siguiente columna: $j = j_1 + j_2 - 2$

Estado de arriba:

$$|j = j_1 + j_2 - 2,\ m = j_1 + j_2 - 2>$$

Puede contener 3 estados producto:

$$|m_1 = j_1,\ m_2 = j_2 - 2> \ = |j_1 j_1> \otimes |j_2 ; j_2 - 2>$$
$$|m_1 = j_1 - 1,\ m_2 = j_2 - 1> \ = |j_1, j_1 - 1> \otimes |j_2, j_2 - 1>$$
$$|m_1 = j_1 - 2,\ m_2 = j_2> \ = |j_1, j_1 - 2> \otimes |j_2, j_2>$$

Tiene que ser ortogonal a los estados hallados antes con el mismo m.

Normalización.

Así se obtiene el $|j, j>$ y después se baja con $J_-$.

# Coeficientes Clebsch-Gordan

## Coeficientes Clebsh-Gordan

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

## Coeficientes Clebsch-Gordan

1. No nulos sólo si $j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2$

2. No nulos sólo si $m = m_1 + m_2$

3. Reales (por convención)

4. $\langle j_1 j_1 ; j_2 , m_2 = j - j_1 | j j \rangle > 0$ (convención de signos)

5. $\langle j_1 m_1 , j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 , -m_1 , j_2 , -m_2 | j , -m \rangle$

Nos ahorra el trabajo de computar para $m < 0$

# Resumen de la Clase **17**

En esta clase vimos:

- Dos ejemplos breves de H con dos espines
- Suma de momentos angulares: motivación del método general
- Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Planteo
- Caso general $\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2$ --- Solución
- Coeficientes Clebsch-Gordan