Perturbaciones dependientes del tiempo.

Supongo que $H = H_0 + \underset{=}{\lambda} \underbrace{H_1(t)}$

acá está la dependencia explícita con t.

Es conocido $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$.

$|\psi_n(t)\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |\psi_n(0)\rangle$ si $H = H_0$.

Si inicialmente estoy en un autoestado de H_0 ($|i\rangle$) el hecho de tener $H_1(t)$ va a producir transiciones entre estados.

La pregunta que nos vamos a hacer es cuál es la probabilidad de hallar al sistema en un estado $|n\rangle \neq |i\rangle$ a tiempo $t>0$?

Vamos a suponer que el estado $|\psi(t)\rangle$ a $t>0$ está dado por

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle .$$

- Si la perturbación no estuviera presente, $a_n(t) = 0$ (solo sobrevive $a_i = 1$)

• Esperamos que los $a_n(t)$ sean pequeños pues $\lambda \ll 1$.

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle.$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left(\sum_n a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle\right) = (H_0 + \lambda H_1(t)) \sum_n a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle.$$

$$i\hbar \sum_n \left[\frac{da_n(t)}{dt} e^{-iE_nt/\hbar} - \cancel{a_n(t)\frac{iE_n}{\hbar} e^{-iE_nt/\hbar}}\right]|n\rangle$$

$$= \cancel{\sum_n a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar} E_n|n\rangle} + \lambda H_1(t) \sum_n a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle$$

$$\Rightarrow i\hbar \sum_n \frac{da_n(t)}{dt} e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle = \lambda \sum_n H_1(t) a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle.$$

Aplico $\langle m|$ a ambos lados.

$$i\hbar \frac{da_m(t)}{dt} e^{-iE_mt/\hbar} = \lambda \sum_n a_n(t) e^{-iE_nt/\hbar}\langle m|H_1(t)|n\rangle.$$

$$\frac{da_m(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\lambda \sum_n a_n(t) e^{i\omega_{mn}t}\langle m|H_1(t)|n\rangle.$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Expando $a_n(t)$ en potencias de λ

$$a_n(t) = a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \lambda^2 a_n^{(2)} + \dots$$

Reemplazando,

$$\frac{d}{dt}\left[a_m^{(0)} + \lambda a_m^{(1)} + \cdots\right] = \frac{1}{i\hbar}\lambda \sum_n \left(a_n^{(0)} + \lambda a_n^{(1)} + \cdots\right) e^{i\omega_{mn}t} \langle m|H_1(t)|n\rangle.$$

Igualando potencias de λ:

$$\frac{da_m^{(0)}}{dt} = 0 \Rightarrow a_m^{(0)} = cte.$$

$$\frac{da_m^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n \underbrace{\langle m|\overset{V(t)}{H_1(t)}|n\rangle}_{V_{mn}} e^{i\omega_{mn}t} a_n^{(0)}.$$

$\vdots$

$$\frac{da_m^{(k+1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n \langle m|H_1(t)|n\rangle e^{i\omega_{mn}t} a_n^{(k)}.$$

$$H = H_0 + V(t)$$

En estos caso resulta útil a veces usar la representación de interacción (o de Dirac).

Supongamos que tenemos un sistema físico cuyo estado a tiempo $t = t_0$ es $|\psi(0)\rangle$

$|\psi(t)\rangle = |\psi; t_0, t\rangle_S$ en rep. de Schrödinger.

Definimos

$$|\psi, t_0; t\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar} |\psi, t_0; t\rangle_S.$$

rep. de interacción.

Para operadores:

$$\hat{A}_I = e^{iH_0 t/\hbar}\, \hat{A}_S\, e^{-iH_0 t/\hbar}$$

Recordamos la representación de Heisenberg:

$$|\alpha\rangle_H = e^{iHt/\hbar} |\alpha\rangle_S .$$

$$\hat{A}_H = e^{iHt/\hbar}\, \hat{A}_S | e^{-iHt/\hbar}$$

- La ecuación de evolución temporal de un estado en la rep de interacción es

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_I = V_I |\psi\rangle_I}$$ → es igual a la ec. de Schrödinger pero usando V en lugar de H.

- $$\boxed{\frac{d\hat{A}_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I, H_0]}$$ → igual a la ec. de Heis. pero con H_0 en lugar de H.

97 Considere el oscilador armónico unidimensional de frecuencia ω_0, que a $t < 0$ está en el estado fundamental. A $t = 0$ se enciende una perturbación

$$V(t) = F_0 x \cos \omega t \ ,$$

donde F_0 es una constante. Obtenga una expresión para el valor de expectación $\langle x \rangle$ como función del tiempo usando la teoría de perturbaciones al orden mas bajo no nulo. ¿Es válido este procedimiento para $\omega \approx \omega_0$?

$$H = H_0 + V(t)$$

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m x^2 \omega_0^2}{2}$$

$$V(t) = F_0 \, x \cos(\omega t).$$

Queremos hallar $\langle x \rangle$.

Inicialmente, $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$.

Recordamos que

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n a_n(t) \, |n\rangle . \qquad a_n(t) \to a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \ldots$$

$$\frac{d a_m^{(0)}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0^{(0)} = 1$$ y todos los demás serán cero.

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle$$

Orden 1:

$$\frac{d}{dt} a_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \langle m | V | n \rangle \, e^{i\omega_{mn} t} \, a_n^{(0)} \qquad a_n^{(0)} \to a_0^{(0)} = 1 .$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} a_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \underbrace{\langle m | V(t) | 0 \rangle}_{V_{m0}} e^{i\omega_{m0} t}$$

$$V(t) = F_0 \cdot x \cdot \cos(\omega t).$$

$$\langle m | F_0 \, x \, \cos(\omega t) | 0 \rangle = F_0 \cos(\omega t) \langle m | x | 0 \rangle.$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (a + a^{+}).$$

$$V_{m0} = F_0 \cos(\omega t) \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \underbrace{\langle m | (a + a^{+}) | 0 \rangle}_{\delta_{m1}}$$

Solo voy a tener $m = 1$.

$$\frac{da_1^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} F_0 \cos(\omega t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \; e^{i\omega_{10} t}$$

$$\omega_{10} = \frac{\frac{3}{2}\hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0}{\hbar} = \omega_0.$$

$$\Rightarrow a_1^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \, F_0 \int_0^t \cos(\omega t') e^{i\omega_0 t'} dt'.$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \frac{F_0}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \int_0^t \left(e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}\right) e^{i\omega_0 t'} dt$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \frac{F_0}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \left[\frac{e^{i(\omega+\omega_0)t'}}{i(\omega+\omega_0)} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t'}}{i(\omega_0-\omega)} \Big|_0^t \right]$$

$$= \frac{-\cancel{i}}{\hbar} \frac{F_0}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\frac{e^{i(\omega+\omega_0)t} - 1}{\cancel{i}(\omega+\omega_0)} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1}{\cancel{i}(\omega_0-\omega)} \right]$$

$= a_1^{(1)}(t)$.

↳ orden más bajo no nulo.

$$|\psi\rangle_I = \underbrace{a_0^{(0)}}_{=1.} |0\rangle + a_1^{(1)} |1\rangle.$$

$$|\psi\rangle_I = |0\rangle + a_1^{(1)} |1\rangle.$$

$$|\psi\rangle_S = e^{-iH_0 t/\hbar} |0\rangle + e^{-iH_0 t/\hbar} a_1^{(1)} |1\rangle.$$

$$= e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} |0\rangle + a_1^{(1)} e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t} |1\rangle.$$

Queremos hallar $\langle x \rangle$.

$\langle \psi | x | \psi \rangle$

$\langle x \rangle_I \rightarrow$ tengo que escribir $\hat{x}_I$

Calculamos

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\,\langle\psi|(a+a^\dagger)\left(e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|0\rangle + a_1^{(1)} e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t}|1\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\,\langle\psi|\left(e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t} a_1^{(1)}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|1\rangle + c \cdot e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t} a_1^{(1)}|2\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\langle 0| e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} + a_1^{(1)*} e^{i\frac{3}{2}\omega_0 t}\langle 1|\right)\left(e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t} a_1^{(1)}|0\rangle + e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}|1\rangle + c \cdot e^{-i\frac{3}{2}\omega_0 t} a_1^{(1)}|2\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(a_1^{(1)} e^{-i\omega_0 t} + a_1^{(1)*} e^{i\omega_0 t}\right)$$

Reemplazamos el valor de $a_1^{(1)}$:

$$\langle x\rangle = \frac{\cancel{\hbar}}{2m\omega_0}\cdot -\frac{F_0}{2\cancel{\hbar}}\left[e^{-i\omega_0 t}\left(\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{(\omega+\omega_0)} + \frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right) + e^{i\omega_0 t}\left(\frac{e^{-i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega+\omega_0} + \frac{e^{-i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}\right)\right]$$

$$= -\frac{F_0}{4m\omega_0}\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega_0 t}}{\omega+\omega_0} + \frac{e^{-i\omega t}-e^{-i\omega_0 t}}{\omega_0-\omega} + \frac{e^{i\omega t}-e^{i\omega_0 t}}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{i\omega t}-e^{i\omega_0 t}}{\omega_0-\omega}\right]$$

$$= \frac{-F_0}{4m\omega_0}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_0 t} + e^{-i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega_0+\omega} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega t} - e^{i\omega_0 t}}{\omega_0-\omega}\right]$$

$$-\frac{F_0}{2m\omega_0}\left[\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0+\omega} + \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0-\omega}\right]$$

$$\langle x\rangle = -\frac{F_0}{2m\omega_0}\,\frac{\left[\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)(\omega_0-\cancel{\omega}) + (\omega_0+\cancel{\omega})(\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t))\right]}{\omega_0^2-\omega}$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = \frac{-F_0}{m}\,\frac{(\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t))}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$\hookrightarrow$ En $\omega = \omega_0$ hay una resonancia, por lo tanto no vale la teoría de perturbaciones.

$\boxed{99}$ El hamiltoniano de un sistema de dos niveles

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & 0 \\ 0 & E_2^0 \end{pmatrix}$$

es perturbado por el potencial

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\cos\omega t \\ \lambda\cos\omega t & 0 \end{pmatrix},$$

donde λ es real.

(a) A $t = 0$ el sistema está en el estado

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo y asumiendo que $E_1^0 - E_2^0$ no es cercano a $\pm\hbar\omega$, derive una expresión para la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para tiempos positivos.

Notación : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |2\rangle$.

Inicialmente $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$

$$|\psi(t)\rangle_S = \sum_n a_n(t)\, e^{-iH_0 t/\hbar}\, |n\rangle$$

$$= a_1(t)\, e^{-iE_1^0 t/\hbar}\, |1\rangle + a_2(t)\, e^{-iE_2^0 t/\hbar}\, |2\rangle.$$

$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \ldots$

- Orden 0 : Inicialmente, $\boxed{|\psi(0)\rangle = |1\rangle}$.

$$\frac{da_m^{(0)}}{dt} = 0 \Rightarrow a_m^{(0)} = \text{cte.} \longrightarrow a_1^{(0)} = 1 \; ; \; a_2^{(0)} = 0.$$

• Orden 1:

$$a_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\sum_n \int_0^t \langle m|V(t')|n\rangle e^{i\omega_{mn}t'} a_n^{(0)} \, dt'$$

"1" $\quad a_1^{(0)}$

$$a_1^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \langle 1|V(t')|1\rangle e^{i\omega_{11}t'} dt' = 0$$

$$a_2^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \langle 2|V(t')|1\rangle e^{i\omega_{21}t'} dt' \qquad \omega_{21} = \frac{E_2^0 - E_1^0}{\hbar}$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\cos\omega t \\ \lambda\cos\omega t & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \langle 1|V(t)|1\rangle = 0 \\ \langle 2|V(t)|1\rangle = \lambda\cos(\omega t). \end{array}$$

$$a_2^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\lambda\int_0^t \cos(\omega t')e^{i\omega_{21}t'} dt'$$

$$= -\frac{\lambda}{\cancel{i}\hbar}\left[\frac{\cancel{i}e^{i\omega_{21}t'}\left(\omega_{21}\cos(\omega t') - i\omega\sin(\omega t')\right)}{(\omega_{21}-\omega)(\omega_{21}+\omega)}\Bigg|_0^{t'}\right].$$

$$a_2^{(1)}(t) = -\frac{\lambda}{\hbar}\frac{1}{\omega_{21}^2-\omega^2}\left[e^{i\omega_{21}t}\left(\omega_{21}\cos(\omega t) - i\omega\sin(\omega t)\right) - \omega_{21}\right]$$

A tiempo $t>0$, $|\psi(t)\rangle_S = \underbrace{a_1^{(0)}}_{=1} e^{-iH_0t/\hbar}|1\rangle + a_2^{(1)} e^{-iH_0t/\hbar}|2\rangle.$

$$\rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-iE_1^0t/\hbar}|1\rangle + a_2^{(1)}(t)e^{-iE_2^0t/\hbar}|2\rangle.$$

La probabilidad de hallar al sistema en el estado $|2\rangle$.

$$P(|2\rangle) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 = |a_2^{(1)}(t)|^2.$$

$$P(|2\rangle) = \frac{\lambda^2}{\hbar^2}\frac{1}{(\omega_{21}^2-\omega^2)^2}\left|e^{i\omega_{21}t}(\omega_{21}\cos\omega t - i\omega\sin\omega t)-\omega_{21}\right|^2$$

$$\omega_{21} = \frac{E_2^0 - E_1^0}{\hbar}$$

$\omega_{21} \sim \omega$ → hay una resonancia, por lo tanto no vale la teoría de perturbaciones.