Clase 21 - Viernes 12/11/2021

La clase pasada vimos:

- Perturbaciones independientes del tiempo: Planteo del problema
- Perturbación de un nivel no degenerado

En esta clase veremos:

- **Perturbación de un nivel no degenerado: segundo orden en la energía**
- **Ejemplo con oscilador armónico**
- **Perturbación de un nivel degenerado**

REPASO

Teoria de perturbaciones independientes del tiempo

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda V \qquad \lambda \ll 1$$

$$H_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$ Conocemos su solución

$$H(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle$$

Expandimos:

$$E(\lambda) = \varepsilon_0 + \lambda\,\varepsilon_1 + \dots + \lambda^q\,\varepsilon_q + \dots$$

$$|\psi(\lambda)\rangle = |0\rangle + \lambda\,|1\rangle + \dots + \lambda^q\,|q\rangle + \dots$$

REPASO

Orden λ^0 : $H_0|0\rangle = \varepsilon_0|0\rangle$

Orden λ^1 : $(H_0 - \varepsilon_0)|1\rangle + (V - \varepsilon_1)|0\rangle = 0$

Orden λ^2 : $(H_0 - \varepsilon_0)|2\rangle + (V - \varepsilon_1)|1\rangle - \varepsilon_2|0\rangle = 0$

Orden λ^q : $(H_0 - \varepsilon_0)|q\rangle + (V - \varepsilon_1)|q-1\rangle - \varepsilon_2|q-2\rangle \ldots - \varepsilon_q|0\rangle = 0$

REPASO

Perturbación de un nivel **no degenerado**: primer orden

$$E_n(\lambda) = E_n^0 + \lambda \langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$|1\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\varphi_p\rangle$$

donde: $|\psi(\lambda)\rangle \approx |\varphi_n\rangle + \lambda\,|1\rangle$

Energías a segundo orden

Energías a segundo orden

Teníamos :

$$\left(H_0 - E_n^0\right)|2\rangle + (V - \varepsilon_1)|1\rangle - \varepsilon_2 |0\rangle = 0$$

Ya conocemos : $|0\rangle = |\varphi_n\rangle$

$$|1\rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_p^0} |\varphi_p\rangle$$

$$\varepsilon_1 = \langle \varphi_n | V | \varphi_n \rangle$$

Proyectamos con $\langle \varphi_n |$

Proyectamos con $\langle\varphi_n|$.

El primer término se va $\Rightarrow$ $\langle\varphi_n|H_0-E_n^0|2\rangle = (\underbrace{E_n^0-E_n^0}_{\langle\varphi_n|})|2\rangle$

$$\langle\varphi_n|V-\varepsilon_1|1\rangle - \varepsilon_2\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = 0\text{, pero } |\varphi_n\rangle \perp |1\rangle$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \langle\varphi_n|V|1\rangle$$

$$= \sum_{p\neq n} \frac{\langle\varphi_p|V|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|V|\varphi_p\rangle}{E_n^0-E_p^0}$$

$$= \sum_{p\neq n} \frac{|\langle\varphi_p|V|\varphi_n\rangle|^2}{E_n^0-E_p^0}$$

Ejemplo

Complement A_{XI}

A ONE-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATOR SUBJECTED TO A PERTURBING POTENTIAL IN x, $\cancel{x^2, x^3}$

Complement A_{XI}

A ONE-DIMENSIONAL HARMONIC OSCILLATOR SUBJECTED TO A PERTURBING POTENTIAL IN x, x^2, x^3

1. Perturbation by a linear potential
   a. *The exact solution*
   b. *The perturbation expansion*

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2$$

$$E_n^0 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad | \varphi_n \rangle$$

Agregamos la perturbación: $W = \lambda \hbar\omega \hat{X}$

$$\Rightarrow \quad H = H_0 + W$$

Este problema se puede resolver en forma exacta:

$$W = -q\mathscr{E}X = -q\mathscr{E}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\hat{X}$$

Complement F_V

A CHARGED HARMONIC OSCILLATOR IN A UNIFORM ELECTRIC FIELD

$$\lambda\hbar\omega \longleftrightarrow -q\mathscr{E}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2}\hbar\omega$$

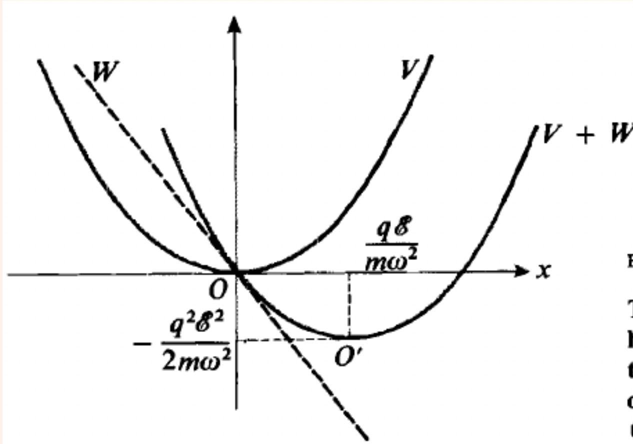


FIGURE 1

The presence of a uniform electric field has the effect of adding a linear term W to the potential energy V of the harmonic oscillator; the total potential $V + W$ is then represented by a displaced parabola.

Similarly, we see from (40) of F_V (after having replaced P by its expression in terms of the creation and annihilation operators $a^\dagger$ and a):

$$|\psi_n\rangle = e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a)}|\varphi_n\rangle \tag{8}$$

The limited expansion of the exponential then yields:

$$|\psi_n\rangle = \left[1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a) + \ldots\right]|\varphi_n\rangle$$

$$= |\varphi_n\rangle - \lambda\sqrt{\frac{n+1}{2}}|\varphi_{n+1}\rangle + \lambda\sqrt{\frac{n}{2}}|\varphi_{n-1}\rangle + \ldots \tag{9}$$

Ahora usando teoría de perturbaciones:

$$W = \lambda \hbar \omega \hat{X} \quad \Rightarrow \quad W = \lambda \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a)$$

W then mixes the state $| \varphi_n \rangle$ only with the two states $| \varphi_{n+1} \rangle$ and $| \varphi_{n-1} \rangle$. The only non-zero matrix elements of W are, consequently:

$$\langle \varphi_{n+1} | W | \varphi_n \rangle = \lambda \sqrt{\frac{n+1}{2}} \hbar\omega$$
$$\langle \varphi_{n-1} | W | \varphi_n \rangle = \lambda \sqrt{\frac{n}{2}} \hbar\omega \qquad (11)$$

Tenemos que aplicar la fórmula:

$$E_n = E_n^0 + \langle \varphi_n | W | \varphi_n \rangle + \sum_{n' \neq n} \frac{|\langle \varphi_{n'} | W | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0} + \ldots$$

Tenemos que aplicar la fórmula:

$$E_n = E_n^0 + \langle \varphi_n | W | \varphi_n \rangle + \sum_{n' \neq n} \frac{|\langle \varphi_{n'} | W | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0} + \dots$$

replacing $E_n^0 - E_{n'}^0$ by $(n - n')\hbar\omega$,

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + 0 - \frac{\lambda^2(n+1)}{2}\hbar\omega + \frac{\lambda^2 n}{2}\hbar\omega + \dots \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{\lambda^2}{2}\hbar\omega + \dots \end{aligned}$$

A segundo orden ya coincide con el exacto

Y para el estado:

$$|\psi_n\rangle = |\varphi_n\rangle + \sum_{n' \neq n} \frac{\langle \varphi_{n'} | W | \varphi_n \rangle}{E_n^0 - E_{n'}^0} |\varphi_{n'}\rangle + \dots$$

$$\Rightarrow \quad |\psi_n\rangle = |\varphi_n\rangle - \lambda\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,|\varphi_{n+1}\rangle + \lambda\sqrt{\frac{n}{2}}\,|\varphi_{n-1}\rangle + \dots$$

Perturbaciones independientes del tiempo: Caso de un nivel degenerado

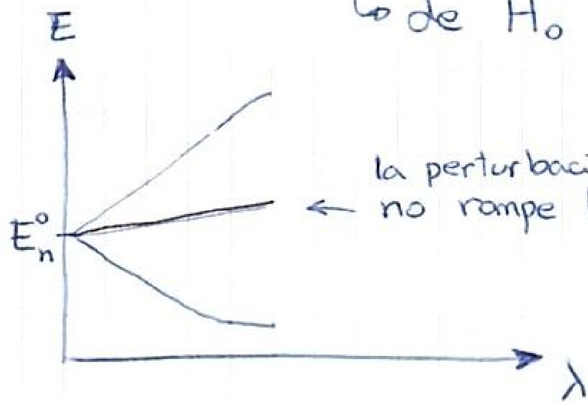
Perturbación de un nivel degenerado

Nivel E_n^0, degeneración g_n. $\left(H_0 |\varphi_n^i\rangle = E_n^0 |\varphi_n^i\rangle\right)$

Autosubespacio asociado $\mathcal{E}_n^0$.

de H_0

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda V$$



la perturbación no rompe la degeneración

$$E(\lambda) \simeq \varepsilon_0 + \lambda \varepsilon_1$$

Orden cero

$$H_0 \,|\, 0 \rangle = \varepsilon_0 \,|\, 0 \rangle \tag{A-9}$$

Now assume that the level E_n^0 whose perturbation we want to study is g_n-fold degenerate (where g_n is greater than 1, but finite). We denote by $\mathscr{E}_n^0$ the corresponding eigensubspace of H_0. In this case, the choice:

$$\varepsilon_0 = E_n^0 \tag{C-1}$$

does not suffice to determine the vector $|\, 0 \rangle$, since equation (A-9) can theoretically be satisfied by any linear combination of the g_n vectors $|\, \varphi_n^i \rangle$ ($i = 1, 2, \ldots, g_n$). We know only that $|\, 0 \rangle$ belongs to the eigensubspace $\mathscr{E}_n^0$ spanned by them.

Perturbación de un nivel degenerado

Buscamos correcciones a primer orden en λ.

$$(H_0 - \varepsilon_0)\,|1\rangle + (V - \varepsilon_1)\,|0\rangle = 0$$

Proyectamos sobre $|\varphi_n^i\rangle$ $\qquad \left(H_0 |\varphi_n^i\rangle = E_n^0 |\varphi_n^i\rangle \right)$

$$\underbrace{\langle \varphi_n^i | H_0 - \varepsilon_0}_{\langle \varphi_n^i | \varepsilon_0} | 1 \rangle + \langle \varphi_n^i | V - \varepsilon_1 | 0 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_n^i | V | 0 \rangle = \varepsilon_1 \langle \varphi_n^i | 0 \rangle$$

$i, j = 1, \dots, g_n$

Insertar: $\sum_{m,j} |\varphi_m^j\rangle\langle\varphi_m^j| = \mathbb{1}$

$$\varepsilon_1 \langle\varphi_n^i|0\rangle = \langle\varphi_n^i|V|0\rangle = \langle\varphi_n^i|V\left(\sum_{mj}|\varphi_m^j\rangle\langle\varphi_m^j|\right)|0\rangle$$

$$= \sum_{mj}\langle\varphi_n^i|V|\varphi_m^j\rangle\langle\varphi_m^j|0\rangle$$

Como $\{|0\rangle\}\in\mathcal{E}_n$, será $\langle\varphi_m^j|0\rangle = 0$ si $m \neq n$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{g_n}\langle\varphi_n^i|V|\varphi_n^j\rangle\langle\varphi_n^j|0\rangle = \varepsilon_1\langle\varphi_n^i|0\rangle$$

Tomemos la matriz $\langle \varphi_n^i | V | \varphi_n^j \rangle$

Dimensión : $g_n \times g_n$

$$(V)_n = \begin{pmatrix} \langle \varphi_n^1 | V | \varphi_n^1 \rangle & \langle \varphi_n^1 | V | \varphi_n^2 \rangle & \cdots & \langle \varphi_n^1 | V | \varphi_n^{g_n} \rangle \\ \langle \varphi_n^2 | V | \varphi_n^1 \rangle & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ \langle \varphi_n^{g_n} | V | \varphi_n^1 \rangle & \cdots & & \langle \varphi_n^{g_n} | V | \varphi_n^{g_n} \rangle \end{pmatrix}$$

Tenemos un problema de autovalores de dim $g_n \times g_n$

que nos dará $\begin{cases} \text{autovalores} : \varepsilon_1^k & \text{a } 1^{er} \text{ orden en } \lambda \quad k = 1, \ldots, g_n \\ \text{autoestados} : |0^k\rangle & \text{a } 0^{th} \text{ " en } \lambda \quad k = 1, \ldots, g_n \end{cases}$

Puede ocurrir que alguna $\mathcal{E}_1^k$ sea degenerada;

o sea, no necesariamente hay g_n valores distintos.

Entonces, a primer orden:

$$E_{n j_k}(\lambda) = E_n^0 + \lambda\, \mathcal{E}_1^k \qquad k = 1, \dots, f_n \leq g_n$$

Si $f_n = g_n$, es porque se rompe completamente la degeneración a primer orden.

Resumen de la Clase 21

En esta clase vimos:

- Perturbación de un nivel no degenerado: segundo orden en la energía
- Ejemplo con oscilador armónico
- Perturbación de un nivel degenerado