

La clase pasada vimos:

- Perturbación de un nivel no degenerado: segundo orden en la energía
- Ejemplo con oscilador armónico
- Perturbación de un nivel degenerado

En esta clase veremos:

- Pictures o representaciones: repaso de Schrödinger y Heisenberg
- Picture de interacción o de Dirac
- Ecuación de Tomonaga-Schwinger
- Serie de Dyson
- Probabilidad de transición

Teoría de perturbaciones independientes del tiempo

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda V \quad \lambda \ll 1$$

$$H_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \quad \text{Conocemos su solución}$$

Caso no degenerado, corrección de la energía a segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \langle \varphi_n | V | \perp \rangle = \sum_{p \neq n} \frac{\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | V | \varphi_p \rangle}{E_n^0 - E_p^0} \\ &= \sum_{p \neq n} \frac{|\langle \varphi_p | V | \varphi_n \rangle|^2}{E_n^0 - E_p^0} \end{aligned}$$

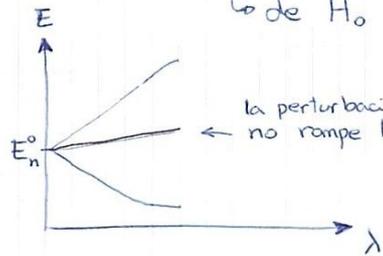
Teoría de perturbaciones independientes del tiempo

Caso de un nivel de energía degenerado:

Perturbación de un nivel degenerado

Nivel E_n^0 , degeneración g_n . $(H_0 |\psi_n^i\rangle = E_n^0 |\psi_n^i\rangle)$

Auto subespacio asociado E_n^0 de H_0 .



$$E(\lambda) \approx \epsilon + \lambda \epsilon_1$$

$$\sum_{j=1}^{g_n} \langle \psi_n^i | V | \psi_n^j \rangle \langle \psi_n^j | 0 \rangle = \epsilon_1 \langle \psi_n^i | 0 \rangle$$

$$V_n = \begin{pmatrix} \langle \psi_n^1 | V | \psi_n^1 \rangle & \langle \psi_n^1 | V | \psi_n^2 \rangle & \dots & \langle \psi_n^1 | V | \psi_n^{g_n} \rangle \\ \langle \psi_n^2 | V | \psi_n^1 \rangle & \dots & & \\ \vdots & & & \\ \langle \psi_n^{g_n} | V | \psi_n^1 \rangle & \dots & \dots & \langle \psi_n^{g_n} | V | \psi_n^{g_n} \rangle \end{pmatrix}$$

Pictures o representaciones

Many-Particle Theory

E K U Gross
Universität Würzburg

E Runge
Harvard University

O Heinonen
University of Central Florida

Chapter 14

Pictures

Sea un observable O .

En mecánica cuántica todo depende de los elementos de matriz:

$$\langle \psi | O | \phi \rangle$$

Sea $A(t)$ un operador unitario que puede depender del tiempo:



$$A^\dagger(t)A(t) = 1 = A(t)A^\dagger(t)$$

Podemos hacer:

$$\begin{aligned} \langle \psi | O | \phi \rangle &= \langle \psi | \overbrace{A^\dagger(t)A(t)}^1 O \overbrace{A^\dagger(t)A(t)}^1 | \phi \rangle \\ &= \langle A(t)\psi | A(t)O A^\dagger(t) | A(t)\phi \rangle. \end{aligned}$$

Podemos hacer:

$$\begin{aligned}
\langle \psi | O | \phi \rangle &= \langle \psi | \overbrace{A^\dagger(t)A(t)}^1 O \overbrace{A^\dagger(t)A(t)}^1 | \phi \rangle \\
&= \langle A(t)\psi | A(t) O A^\dagger(t) | A(t)\phi \rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, si transformamos todos los estados y los operadores según:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle_A &\equiv A(t)|\psi\rangle \\
O(t)_A &\equiv A(t) O A^\dagger(t)
\end{aligned}$$

Todos los elementos de matriz de operadores se conservan:

$$\langle \psi | O | \phi \rangle = \langle \psi_A | O_A | \phi_A \rangle$$

Schrödinger Picture: $A(t) \equiv 1$

Los estados y los operadores tienen la dependencia temporal “normal” que surge de aplicar las reglas de cuantización para obtener operadores a partir de las variables clásicas.

Evolución temporal del estado – ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S = H_S |\Psi(t)\rangle_S$$

El **operador de evolución** nos da el ket evolucionado:

$$|\Psi(t)\rangle_S \equiv U(t, t_0)_S |\Psi(t_0)\rangle$$

Operador de evolución en picture de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0)_S = H_S U(t, t_0)_S$$

con $U(t_0, t_0) = 1$

$$U(t, t_0)_S = U(t, t')_S U(t', t_0)_S$$

$$U(t, t_0)_S^{-1} = U(t_0, t)_S$$

$$U^\dagger(t, t_0)_S U(t, t_0)_S = 1 \quad \text{unitario}$$

$$U(t, t_0)_S = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_S (t - t_0) \right]$$

Si H_S no depende del tiempo:

***Picture* de Heisenberg**

Representación de Heisenberg

Está definida por: $A(t) \equiv U^\dagger(t, t_0) S = U(t_0, t) S$

Vemos que el estado está “frozen”:

$$|\Psi(t)\rangle_H = A(t) |\Psi(t)\rangle_S = U(t_0, t) S |\Psi(t)\rangle_S = |\Psi(t_0)\rangle_S = \text{constant.}$$

Picture de Heisenberg

Los operadores están dados por:

$$O(t)_H = U^\dagger(t, t_0)_S O(t)_S U(t, t_0)_S$$

Y como dijimos, si H_S es independiente del tiempo:

$$O(t)_H = e^{+\frac{i}{\hbar} H_S t} O(t)_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t}$$

tomamos $t_0 = 0$

Los estados están fijos y toda la evolución temporal está en los operadores.

$$i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_H = [O_H, H_H] + i\hbar \left[\frac{\partial O}{\partial t} \right]_H$$

Ecuación de movimiento de Heisenberg

Representación de interacción

Representación de interacción

Supongamos:

$$H_S = H_0 + V_S$$

$$H_0 \neq H_0(t)$$

$$A(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} |\Psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\Psi(t)\rangle_S \\ O(t)_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} O(t)_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \end{array} \right.$$

Notar que, en particular, el H_0 no cambia:

$$[H_0]_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} [H_0]_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} = [H_0]_S \equiv H_0$$

En el picture de interacción **evolucionan** los **estados** y los **operadores**

Operadores

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar \frac{d}{dt} O(t)_I = [O(t)_I, H_0] + i\hbar \left[\frac{\partial O}{\partial t} \right]_I \\ \left[\frac{\partial O}{\partial t} \right]_I \equiv e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \left[\frac{\partial O_S}{\partial t} \right] e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} \end{array} \right.$$

Se demuestra igual que en el picture de Heisenberg

Evolución del estado

Ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_S = H_S |\Psi(t)\rangle_S$$

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\Psi(t)\rangle_S$$



$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\psi(t)\rangle_I$$



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\Psi(t)\rangle_I = e^{-(i/\hbar)H_0 t} \left[H_0 |\Psi(t)\rangle_I + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I \right]$$

$$= H_S e^{-(i/\hbar)H_0 t} |\Psi(t)\rangle_I$$

Evolución del estado

$$e^{-(i/\hbar)H_0t} \left[H_0 |\Psi(t)\rangle_I + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I \right] = H_S e^{-(i/\hbar)H_0t} |\Psi(t)\rangle_I$$



$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I &= e^{(i/\hbar)H_0t} H_S e^{-(i/\hbar)H_0t} |\Psi(t)\rangle_I - H_0 |\Psi(t)\rangle_I \\ &= [H(t)_I - H_0] |\Psi(t)\rangle_I \end{aligned}$$



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I = V(t)_I |\Psi(t)\rangle_I$$

Ecuación de Tomonaga-Schwinger

Evolución del estado

Expandamos el estado en representación de interacción en la base de autoestados de H_0 en la rep. de Schrödinger:

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t) |n\rangle \quad \text{Hallar } c_n(t)$$

La evolución del estado está dada por la ecuación de Tomonaga-Schwinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I = \sum_m V_I(t) |m\rangle \langle m | \psi(t)\rangle_I$$


$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overbrace{\langle n | \psi(t)\rangle_I}^{\dot{c}_n(t)} = \sum_m \langle n | V_I(t) | m\rangle \overbrace{\langle m | \psi(t)\rangle_I}^{c_m(t)}$$

Representación de interacción

$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t) |n\rangle \quad \longrightarrow \quad \text{hallar } c_n(t)$$

$$\longrightarrow \quad i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m \langle n | V_I(t) | m \rangle c_m(t)$$

Notar que: $\langle n | V_I(t) | m \rangle = \langle n | e^{iH_0 t/\hbar} V_S(t) e^{-iH_0 t/\hbar} | m \rangle$

$$\omega_{nm} \equiv \frac{E_n - E_m}{\hbar}$$

$$= e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle n | V_S(t) | m \rangle = V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t}$$

$$\longrightarrow \quad i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t)$$

$$\longrightarrow i\hbar \dot{c}_n(t) = \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t)$$

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \cdots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \cdots \\ & & V_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

J. J. Sakurai

5 APPROXIMATION METHODS	285
5.1 Time-Independent Perturbation Theory: Nondegenerate Case	285
5.2 Time-Independent Perturbation Theory: The Degenerate Case	298
5.3 Hydrogenlike Atoms: Fine Structure and the Zeeman Effect	304
5.4 Variational Methods	313
5.5 Time-Dependent Potentials: The Interaction Picture	316
5.6 Time-Dependent Perturbation Theory	325
5.7 Applications to Interactions with the Classical	

Serie de Dyson

Definimos el operador de evolución en la rep. de interacción:

$$\left. \begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I &= V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \end{aligned} \right\} \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0)$$

Con la condición inicial: $U_I(t_0, t_0) = 1$

Pasando a la forma integral:

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') U_I(t', t_0)$$

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') U_I(t', t_0)$$

Método iterativo: reemplazamos $U_I(t', t_0)$ en el lado derecho:

$$\begin{aligned} U_I(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t'') U_I(t'', t_0) \right] \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') U_I(t'', t_0) \end{aligned}$$

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} V_I(t'') U_I(t'', t_0) dt'' \right] dt'$$

exacto

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'')$$

órdenes 0, 1 y 2

$$+ \dots + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} V_I(t') V_I(t'') \dots V_I(t^{(n)})$$

3 hasta n

+ ...

órdenes mayores que n

Serie de Dyson

Probabilidad de transición

Probabilidad de transición

Supongamos: $|\psi(t_0)\rangle_I = |i\rangle$ donde $H_0|i\rangle = E_i|i\rangle$

$$|\psi(t)\rangle_I = U_I(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_I = U_I(t, t_0)|i\rangle$$

$$\longrightarrow \underbrace{\langle n|\psi(t)\rangle_I}_{c_n(t)} = \langle n|U_I(t, t_0)|i\rangle$$

Usamos la expansión perturbativa de $U_I(t, t_0)$:

$$c_n^{(0)}(t) = \langle n|1|i\rangle = \delta_{ni}$$

$$c_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle_I = \langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle$$

Usamos la expansión perturbativa de $U_I(t, t_0)$:

$$c_n^{(0)}(t) = \langle n | 1 | i \rangle = \delta_{ni}$$

$$c_n^{(1)}(t) = \langle n | \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' V_I(t') | i \rangle$$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' \langle n | e^{iH_0(t'-t_0)/\hbar} V(t') e^{-iH_0(t'-t_0)/\hbar} | i \rangle$$

$$= \left(\frac{-i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}(t'-t_0)} V_{ni}(t')$$

$$c_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle_I = \langle n | U_I(t, t_0) | i \rangle$$

Análogamente:

$$c_n^{(2)}(t) = \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \sum_m \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' e^{i\omega_{nm}(t'-t_0)} V_{nm}(t') e^{i\omega_{mi}(t''-t_0)} V_{mi}(t'')$$

La probabilidad de encontrar a la partícula en el estado $|n\rangle$ es (si $n \neq i$)

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow n}(t) = |c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots|^2$$

Probabilidad de transición

Resumen de la Clase 22

En esta clase vimos:

- Pictures o representaciones: repaso de Schrödinger y Heisenberg
- Picture de interacción o de Dirac
- Ecuación de Tomonaga-Schwinger
- Serie de Dyson
- Probabilidad de transición