Clase 5 - Martes 31/08/2021

La clase pasada vimos:

- Representaciones en el espacio de estados
- Kets, bras, operadores
- Cambio de representación
- Ecuación de autovalores
- Cálculo de autovalores y autovectores
- Ejemplo: sistema de 2x2 con campo eléctrico

En esta clase veremos:

- Observables
- Observables que conmutan
- Conjunto completo de observables que conmutan (CCOC)

Representaciones en el Espacio de estados

REPASO

	Base discreta	Base continua
	$\{ \lvert u_i \rangle \}$	$\{ \lvert w_\alpha \rangle \}$
Ortonormalidad y clausura	$\langle u_i \lvert u_j \rangle = \delta_{ij}$	$\langle w_\alpha \lvert w_{\alpha'} \rangle = \delta(\alpha - \alpha')$
	$\sum_i \lvert u_i \rangle \langle u_i \rvert = \mathbb{1}$	$\int d\alpha \lvert w_\alpha \rangle \langle w_\alpha \rvert = \mathbb{1}$
Kets	$\lvert \psi \rangle = \sum_i c_i \lvert u_i \rangle$	$\lvert \psi \rangle = \int d\alpha \; c(\alpha) \lvert w_\alpha \rangle$
	$\begin{pmatrix} \langle u_1 \lvert \psi \rangle \\ \langle u_2 \lvert \psi \rangle \\ \vdots \\ \langle u_i \lvert \psi \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$	$\alpha \downarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle w_\alpha \lvert \psi \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$

Representaciones en el Espacio de estados

REPASO

Base discreta $\{ |u_i\rangle \}$ Base continua $\{ |w_\alpha\rangle \}$

Bras

$$\langle\varphi| = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle\langle u_i|$$

$$(\langle\varphi|u_1\rangle \quad \langle\varphi|u_2\rangle \;\ldots\ldots\; \langle\varphi|u_i\rangle \;\ldots\ldots)$$

$$\langle\varphi| = \int d\alpha\, \langle\varphi|w_\alpha\rangle\langle w_\alpha|$$

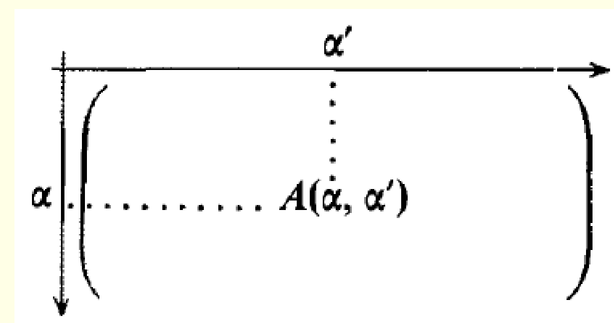
$$(\ldots\ldots\ldots\ldots\; \underset{\alpha}{\langle\varphi|w_\alpha\rangle} \;\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Operadores

$$A_{ij} = \langle u_i|A|u_j\rangle$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1j} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{ij} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$A(\alpha, \alpha') = \langle w_\alpha|A|w_{\alpha'}\rangle$$



Representaciones en el Espacio de estados

REPASO

Base discreta $\{ |u_i\rangle \}$

$$|\psi'\rangle = A|\psi\rangle$$

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1j} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{ij} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi | A | \psi \rangle = (b_1^* \ b_2^* \ldots b_i^* \ldots) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1j} & \ldots \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2j} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & A_{ij} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Conjugación hermítica en la notación de Dirac

REPASO

Cambio de representación

$$S_{ik} = \langle u_i \mid t_k \rangle$$

$$\{\,|u_i\rangle\,\} \longleftrightarrow \{\,|t_k\rangle\,\}$$

Autovalores y autovectores de un operador

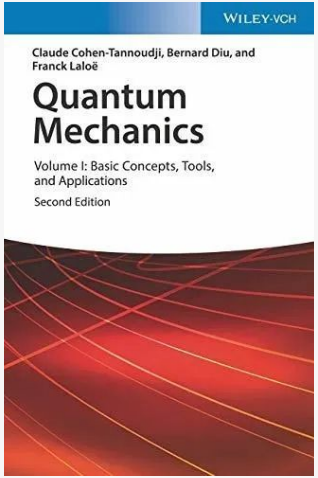
$$A\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$$

$$\sum_j [A_{ij} - \lambda\delta_{ij}]c_j = 0$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \ldots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} \ldots & A_{NN}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Observables

OUTLINE OF CHAPTER II



Observables

<u>Autovalores y autovectores de operadores Hermíticos</u>

Sea A Hermítico: $A = A^+$. Sea $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

Teorema: $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$$

Pero $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|A^+|\psi\rangle^* = \langle\psi|A|\psi\rangle^* \in \mathbb{R}$

Como también $\langle\psi|\psi\rangle \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ///

Observables

<u>Teo</u>: $\begin{cases} A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \\ A|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle \end{cases}$ si $\lambda \neq \mu \Rightarrow |\psi\rangle \perp |\varphi\rangle$

Como A es Hermítico, $A|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle \Rightarrow$

$$\langle\varphi|A^{+} = \langle\varphi|\mu^{*} \Rightarrow \langle\varphi|A = \mu\langle\varphi|$$

Entonces: $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle\varphi|A|\psi\rangle}_{\mu\langle\varphi|\psi\rangle} = \lambda\langle\varphi|\psi\rangle$

$$\Rightarrow (\mu-\lambda)\langle\varphi|\psi\rangle = 0$$

Como $\mu \neq \lambda \Rightarrow \langle\varphi|\psi\rangle = 0 \Rightarrow |\varphi\rangle \perp |\psi\rangle$ ///.

Observables

Definición de observable

Sean autoestados y autovalores de A: $\{a_n, |\psi_n^i\rangle, i=1,\ldots g_n\}$

degeneración de a_n

Siempre $\langle\psi_n^i|\psi_m^j\rangle = 0$ si $n \neq m$

Además, para dado n se puede pedir:

$$\langle\psi_n^i|\psi_n^j\rangle = \delta_{ij}$$

En síntesis, $\langle\psi_n^i|\psi_m^j\rangle = \delta_{nm}\,\delta_{ij}$

Expresa ortonormalidad de los autovectores de A.

Observables

Def: A es un observable si sus autovectores forman una base:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i| = \mathbb{1}$$

Espectro mixto: discreto y continuo

$$\sum_{n} \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i| + \int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu\, |\psi_\nu\rangle\langle\psi_\nu| = \mathbb{1}$$

$$\langle\psi_n^i|\psi_m^j\rangle = \delta_{nm}\,\delta_{ij}$$

$$\langle\psi_\nu|\psi_{\nu'}\rangle = \delta(\nu-\nu')$$ (Delta de Dirac)

$$\langle\psi_n^i|\psi_\nu\rangle = 0$$

Observables

Ejemplo : proyector : Teorema: El proyector es observable

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es hermítico . $\lambda \begin{array}{l} \nearrow 1 \ , \ |\psi\rangle \\ \searrow 0 \ , \ \text{kets} \perp |\psi\rangle \end{array}$

Sea $|\varphi\rangle$ arbitrario.

$$|\varphi\rangle = \mathbb{1}|\varphi\rangle + P_\psi|\varphi\rangle - P_\psi|\varphi\rangle = P_\psi|\varphi\rangle + (\mathbb{1} - P_\psi)|\varphi\rangle$$

Vemos que $P_\psi|\varphi\rangle$ es autoestado de P_ψ con $\lambda = 1$:

$$P_\psi\left(P_\psi|\varphi\rangle\right) = P_\psi^2|\varphi\rangle = P_\psi|\varphi\rangle$$

También $(\mathbb{1} - P_\psi)|\varphi\rangle$ es autoestado de P_ψ, pero con $\lambda = 0$:

$$P_\psi\left((\mathbb{1} - P_\psi)|\varphi\rangle\right) = (P_\psi - P_\psi^2)|\varphi\rangle = (P_\psi - P_\psi)|\varphi\rangle = 0$$

Conclusión: el ket arbitrario $|\varphi\rangle$ puede ser expandido en autoestados de $P_\psi \Rightarrow P_\psi$ es observable.

Conjunto de observables que conmutan

Teorema I

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad [A, B] = 0 \\ \\ A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad A\left(B|\psi\rangle\right) = aB|\psi\rangle$$

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle \Rightarrow \begin{array}{c} BA|\psi\rangle = aB|\psi\rangle \\ \| \\ AB|\psi\rangle \end{array}$$

$\checkmark$

Conjunto de observables que conmutan

(i) Si a es no degenerado $\Rightarrow$ $B|\psi\rangle \parallel |\psi\rangle$ (es el único autovector)

(ii) Si a es degenerado $\Rightarrow$ autosubespacio ε_a $(\dim(\varepsilon_a) > 1)$

y vemos que $B|\psi\rangle \in \varepsilon_a$.

O sea: "cada autosubespacio de A es globalmente invariante frente a la acción de B".

Conjunto de observables que conmutan

Teorema II

$$\left.\begin{aligned} &\text{Si } [A, B] = 0 \\ &A|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle \\ &A|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle \\ &a_1 \neq a_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0$$

Dem: $B|\psi_2\rangle$ es autovector de A con autovalor a_2

$\Rightarrow \quad B|\psi_2\rangle \perp |\psi_1\rangle$

↳ demostrado para operadores hermíticos

$\Rightarrow \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0 \qquad ///$

Conjunto de observables que conmutan

Otra demostración: $[A, B] = 0 \Rightarrow \langle \psi_1 | [A, B] | \psi_2 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \psi_1 | AB - BA | \psi_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \psi_1 | AB | \psi_2 \rangle - \langle \psi_1 | BA | \psi_2 \rangle = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (a_1 - a_2) \langle \psi_1 | B | \psi_2 \rangle = 0 \\ \text{como } a_1 \neq a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \psi_1 | B | \psi_2 \rangle = 0$$

Conjunto de observables que conmutan

Teorema III:

Si $[A, B] = 0 \Rightarrow$ se puede construir una base ortonormal

Sean A, B observables con autovectores comunes de A y B.

Como A es observable, existe base $\{|u_n^i>\}$

$$A|u_n^i> = a_n |u_n^i> \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad i = 1, 2, \ldots, g_n$$

Conjunto de observables que conmutan

La matriz de B en $\{|u_n^i\rangle\}$ es block-diagonal:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{E}_3 & \cdots \\
\hline
\mathcal{E}_1 & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\mathcal{E}_2 & 0 & & 0 & 0 \\
\hline
\mathcal{E}_3 & 0 & & & 0 \\
\hline
\vdots & 0 & & &
\end{array}$$

tamaño $g_n \times g_n$

Autosubespacios: $\mathcal{E}_n$

asociados a a_n

Conjunto de observables que conmutan

- Si a_n es no-degenerado el autovector $|u_n\rangle$ es común a A y B. Lo incluimos en la base común.

- Si a_n es degenerado $(g_n > 1)$.
  Cualquier vector en $\mathcal{E}_n$ es autovector de A con autoval. a_n

  en $\mathcal{E}_n$: $\overline{\overline{A}} = a_n I_{g_n \cdot g_n}$

Conjunto de observables que conmutan

La matriz de B en $\mathcal{E}_n$, $\beta_{ij}^{(n)} = \langle u_n^i | B | u_n^j \rangle$

es hermítica $\Rightarrow$ diagonalizable $\Rightarrow$ $\{ |v_n^i\rangle,\ i = 1, \ldots, g_n \}$

con $\langle v_n^i | B | v_n^j \rangle = \delta_{ij}\, \beta_i^{(n)}$

y $B |v_n^i\rangle = \beta_i^{(n)} |v_n^i\rangle$

Los $|v_n^i\rangle$ se pueden escribir en términos de los $|u_n^j\rangle$

"en cada autosubespacio de A $(\mathcal{E}_n)$ es posible elegir una base común de A y B"

(y viceversa...)

Haciendo esto $\forall n$ obtenemos la base común de todo el espacio de Hilbert.

Conjunto de observables que conmutan

Degeneración restante

Los autovectores comunes de A y B

$$A |u^i_{n,p}\rangle = a_n |u^i_{n,p}\rangle$$

$$B |u^i_{n,p}\rangle = b_p |u^i_{n,p}\rangle$$

pueden ser Todavía degenerados con degeneración $g_{n,p}$

A B

Inverso de teorema III

Si existe base común de A y B $\Longrightarrow [A, B] = 0$ Demostrar, fácil

Conjunto de observables que conmutan

Conjunto completo de observables que conmutan (C.C.O.C)

Un conjunto de observables A, B, C, ... forma un CCOC si

(i) A, B, C, ... conmutan de a pares

(ii) si especificar los autovalores de todos los operadores determina un único autovector común.

(Alternativa:
A, B, C, ... es un CCOC si existe una única base de autovectores comunes)

Conjunto de observables que conmutan

Notación:

$\{A, B, C\} \longrightarrow$ autovalores: $\{a_n, b_p, c_r\} \longrightarrow$

autovector : $|a_n\, b_p\, c_r\rangle$

Ejemplo:

$$H = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(r) \longrightarrow n$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \longrightarrow \hbar^2 l(l+1)$$

$$L_z \longrightarrow \hbar m$$

$$[H, L^2] = 0$$

$$[H, L_z] = 0$$

$$[L^2, L_z] = 0$$

$$\boxed{\{n, l, m\} \longrightarrow |n, l, m\rangle}$$

Ir mirando esta sección:

E. TWO IMPORTANT EXAMPLES OF REPRESENTATIONS AND OBSERVABLES

1. The $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ and $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ representations
   - *a.* Definition
   - *b.* Orthonormalization and closure relations
   - *c.* Components of a ket
   - *d.* The scalar product of two vectors
   - *e.* Changing from the $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ representation to the $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ representation
2. The **R** and **P** operators
   - *a.* Definition
   - *b.* **R** and **P** are Hermitian
   - *c.* Eigenvectors of **R** and **P**
   - *d.* **R** and **P** are observables

Resumen de la Clase 5

En esta clase vimos:

- Observables
- Observables que conmutan
- Conjunto completo de observables que conmutan (CCOC)