Clase 8 - Viernes 10/09/2021

La clase pasada vimos:

- Valor medio de un observable en un estado
- Desviación cuadrática media de un observable en un estado
- Relación de incerteza de Heisenberg
- Estado Gaussiano: mínima incerteza

En esta clase veremos:

- Representaciones |**r**> y |**p**>
- Compatibilidad de observables

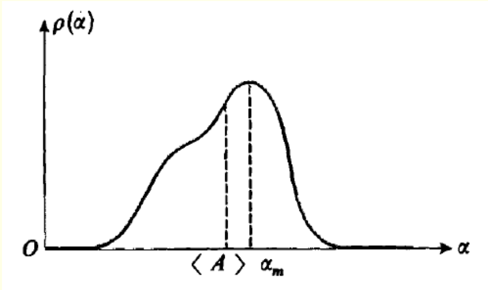
REPASO

Valor medio de un observable en un estado

$$\frac{1}{N}\sum_n a_n \mathcal{N}(a_n) \xrightarrow{N \longrightarrow \infty} \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \langle A\rangle_\psi$$

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

$$\langle A\rangle_\psi = \int \alpha \langle \psi | v_\alpha \rangle \langle v_\alpha | \psi \rangle \, d\alpha$$



Desviación cuadrática media

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$$

Relaciones de incerteza de Heisenberg

REPASO

Para un estado dado $|\psi\rangle$ se cumple que:

$$\begin{cases} \Delta X \,.\, \Delta P_x \geqslant \hbar/2 \\ \Delta Y \,.\, \Delta P_y \geqslant \hbar/2 \\ \Delta Z \,.\, \Delta P_z \geqslant \hbar/2 \end{cases}$$

$$[Q, P] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P \,.\, \Delta Q \geqslant \frac{\hbar}{2}}$$

Generalización:

$$\Delta A \,.\, \Delta B \geqslant \frac{1}{2} \left| \langle\, [A, B]\, \rangle \right|$$

Estado de mínima incerteza en los observables conjugados:

$$\psi(q) = C\, e^{i\langle P\rangle q/\hbar}\, e^{-\left[\frac{q-\langle Q\rangle}{2\,\Delta Q}\right]^2} \qquad C = [2\pi(\Delta Q)^2]^{-1/4}$$

En la representación |q>

$$\overline{\psi}(p) = [2\pi(\Delta P)^2]^{-1/4}\, e^{-i\langle Q\rangle p/\hbar}\, e^{-\left[\frac{p-\langle P\rangle}{2\,\Delta P}\right]^2}$$

En la representación |p>

Representaciones $|\mathbf{r}\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle$

CLASE 4

Representaciones en el espacio de estados

Elegir una base

Representación $\longleftrightarrow$ base ortonormal de $\mathcal{E}$

$$|\psi\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n|\psi\rangle \end{bmatrix} \qquad \hat{A} \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle u_1|A|u_1\rangle & \langle u_1|A|u_2\rangle & \cdots \\ \langle u_2|A|u_1\rangle & \langle u_2|A|u_2\rangle & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

La base satisface: ortonormalidad y clausura:

Representación discreta $\{|u_i\rangle\}$

$$\langle u_i | u_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$$

Continua $\{|w_\alpha\rangle\}$

$$\langle w_\alpha | w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')$$

$$\int d\alpha \, |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| = \mathbb{1}$$

Representaciones |r> y |p>

Las representaciones $\{|\vec{r}\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$

El espacio de Hilbert para una partícula con 3 grados de libertad espaciales es $\mathcal{F}$, el espacio de las funciones de onda "suaves" de cuadrado integrable.

Vimos las bases especiales:

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \qquad v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}$$

Representaciones |r> y |p>

Teníamos la correspondencia $\varphi(\vec{r}) \longrightarrow |\varphi\rangle$

A pesar de que no son verdaderas funciones de onda les asociamos kets en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$:

$$\xi_{\vec{r}_0}(\vec{r}) \longleftrightarrow |\vec{r}_0\rangle$$

$$v_{\vec{p}_0}(\vec{r}) \longleftrightarrow |\vec{p}_0\rangle$$

Estos kets forman dos bases o "representaciones" muy útiles en $\mathcal{E}_{\vec{r}}$

Estas bases tienen índices continuos $\vec{r}_0$ y $\vec{p}_0$

Representaciones |r> y |p>

Ya vimos la ortonormalidad y relaciones de clausura:

$$\langle \vec{r}_0 | \vec{r}_0\,' \rangle = \delta(\vec{r}_0 - \vec{r}_0\,') \qquad \int d^3r_0 \, |\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0| = \mathbb{1}$$

$$\langle \vec{p}_0 | \vec{p}_0\,' \rangle = \delta(\vec{p}_0 - \vec{p}_0\,') \qquad \int d^3p_0 \, |\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0| = \mathbb{1}$$

donde $\langle \vec{r}_0 | \vec{r}_0\,' \rangle = \int d^3r \, \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r}) \, \xi_{\vec{r}_0\,'}(\vec{r}) = \int d^3r \, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0\,'$

$$\langle \vec{p}_0 | \vec{p}_0\,' \rangle = \int d^3r \, v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r}) \, v_{\vec{p}_0\,'}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r \, e^{-i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar} \, e^{i\vec{p}_0\,'\cdot\vec{r}/\hbar}$$

Representaciones |r> y |p>

Componentes de un ket $|\psi\rangle$ en bases $\{|\vec{r}_0\rangle\}$ y $\{|\vec{p}_0\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \int d^3r_0\, |\vec{r}_0\rangle\langle\vec{r}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r_0\, |\vec{r}_0\rangle \int d^3r\, \xi^*_{\vec{r}_0}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3r_0\, |\vec{r}_0\rangle \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3r_0\, \psi(\vec{r}_0)\, |\vec{r}_0\rangle$$

Entonces $\psi(\vec{r}_0)$ es el coeficiente de $|\psi\rangle$ en su expansión en la base $\{|\vec{r}_0\rangle\}$.

Representaciones |r> y |p>

Ya podemos quitar el cerito y escribir directamente los estados de la base como $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle \vec{r}|\psi\rangle = \int d^3r_0 \, \psi(\vec{r}_0) \langle \vec{r}|\vec{r}_0\rangle = \psi(\vec{r})$$

$$\boxed{\langle \vec{r}|\psi\rangle = \psi(\vec{r})}$$

Representaciones |r> y |p>

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \int d^3p_0\; |\vec{p}_0\rangle\langle\vec{p}_0|\psi\rangle$$

$$= \int d^3p_0\; |\vec{p}_0\rangle \int v^*_{\vec{p}_0}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})\,d^3r$$

$$= \int d^3p_0\; |\vec{p}_0\rangle \int d^3r\, \frac{e^{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\cdot\psi(\vec{r})$$

$$= \int d^3p_0\; \bar{\psi}(\vec{p}_0)\,|\vec{p}_0\rangle$$

$\bar{\psi}(\vec{p}_0)$ es el coeficiente en la base $\{|\vec{p}_0\rangle\}$

Ya podemos quitar el cerito y escribir directamente los estados de la base como $\{|\vec{p}\rangle\}$.

$$\langle\vec{p}|\psi\rangle = \int d^3p_0\; \bar{\psi}(\vec{p}_0)\,\langle\vec{p}|\vec{p}_0\rangle = \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\boxed{\langle\vec{p}|\psi\rangle = \bar{\psi}(\vec{p})}$$

Operadores **R** y **P**

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

Operador posición $\vec{R} = (x, y, z)$

Sabemos como actúa sobre las funciones de onda:

$$\hat{X}\,\psi(\vec{r}) = x\,\psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r})$$

Su acción sobre el ket $|\psi\rangle$ está dada por eso:

$$\hat{X}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

$$\langle\vec{r}|\,\hat{X}\,|\psi\rangle = \langle\vec{r}|\psi'\rangle = \psi'(\vec{r}) = x\,\psi(\vec{r})$$

Representaciones |r> y |p> : Operadores **R** y **P**

En la representación $\{|\vec{r}>\}$, $\hat{X}$ actúa multiplicando por x.

Lo definimos como operador que actúa sobre los kets de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ a través de su acción en la representación $\{|\vec{r}>\}$.

Análogamente:

$$\langle \vec{r} \,|\, X \,|\, \psi \rangle = x \langle \vec{r} \,|\, \psi \rangle$$

$$\langle \vec{r} \,|\, Y \,|\, \psi \rangle = y \langle \vec{r} \,|\, \psi \rangle$$

$$\langle r \,|\, Z \,|\, \psi \rangle = z \langle \vec{r} \,|\, \psi \rangle$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$

Podemos pensar a los operadores X, Y, Z como "componentes" de un "operador vectorial", $\vec{R}$.

Representaciones |r> y |p> : Operadores R y P

Elemento de matriz de X

$$\langle \varphi | X | \psi \rangle = \langle \varphi | \mathbb{1}\, X | \psi \rangle = \langle \varphi | \left(\int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle \vec{r}| \right) X |\vec{r}\rangle$$

$$= \int d^3r\, \langle \varphi | \vec{r}\rangle \langle \vec{r} | X | \psi \rangle = \int d^3r\, \varphi^*(\vec{r})\, x\, \psi(\vec{r})$$

Operador momento $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$

Se define $\vec{P}$ por su acción en la representación $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$\langle \vec{p} | P_x | \psi \rangle = p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_x\, \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p} | P_y | \psi \rangle = p_y \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_y\, \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p} | P_z | \psi \rangle = p_z \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_z\, \bar{\psi}(\vec{p})$$

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

<u>Operador momento</u> $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$

Se define $\vec{P}$ por su acción en la representación $\{|\vec{p}\rangle\}$:

$$\langle \vec{p} | P_x | \psi \rangle = p_x \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_x \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p} | P_y | \psi \rangle = p_y \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_y \bar{\psi}(\vec{p})$$

$$\langle \vec{p} | P_z | \psi \rangle = p_z \langle \vec{p} | \psi \rangle = p_z \bar{\psi}(\vec{p})$$

Representaciones |r> y |p> : Operadores R y P

Es importante conocer su acción en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle \vec{r} | P_x | \psi \rangle = \int d^3p \, \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | P_x | \psi \rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \; e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \underbrace{p_x \; \bar{\psi}(\vec{p})}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \, \bar{\psi}(\mathbf{p})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p \, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \, \bar{\psi}(\mathbf{p})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r})$$

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

O sea, en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\vec{P} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

Elemento de matriz de P_x calculado usando $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$\langle\varphi|P_x|\psi\rangle = \int d^3r\ \langle\varphi|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|P|\psi\rangle$$

$$= \int d^3r\ \varphi^*(\vec{r})\ \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\ \psi(\vec{r})$$

Representaciones |r> y |p> : Operadores **R** y **P**

Relación fundamental : $[X, P_x] = i\hbar$

$$\langle \vec{r} | [X, P_x] | \psi \rangle = \langle \vec{r} | X P_x - P_x X | \psi \rangle$$

$$= x \langle \vec{r} | P_x | \psi \rangle - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{r} | X | \psi \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial}{\partial x} \langle \vec{r} | \psi \rangle - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$= i\hbar \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

Válido para todo $|\psi\rangle$ y $|\vec{r}\rangle$

$$\Rightarrow [X, P_x] = i\hbar \, \mathbb{1}$$

Relaciones Canónicas de conmutación :

$[R_i, R_j] = 0$

$[P_i, P_j] = 0$ $\qquad [R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}$ $\qquad i, j = 1, 2, 3$

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

Hermiticidad de R_i y P_i

$$\langle \varphi | x | \psi \rangle = \int d^3r \; \varphi^*(\vec{r}) \; x \; \psi(\vec{r})$$

$$= \left[\int d^3r \; \psi^*(\vec{r}) \; x \; \varphi(\vec{r}) \right]^*$$

$$= \langle \psi | x | \varphi \rangle^* \qquad ///$$

Representaciones |r> y |p> : Operadores R y P

Hermiticidad de P_x :

$$\langle \varphi | P_x | \psi \rangle = \int d^3r \; \varphi^*(\vec{r}) \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi(\vec{r})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int dy\, dz \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \varphi^*(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r})$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int dy\, dz \left[\underbrace{\varphi^*(\vec{r})\,\psi(\vec{r}) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{\text{las funciones de onda Tienden a cero en } x \to \pm\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \psi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \varphi^*(\vec{r}) \right]$$

$$= -\frac{\hbar}{i} \int d^3r \; \psi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \varphi^*$$

$$= \left[\frac{\hbar}{i} \int d^3r \; \psi^*(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\vec{r}) \right]^* = \langle \psi | P_x | \varphi \rangle^*$$

Representaciones |r> y |p> : Operadores R y P

Autovectores de X

Vimos: $\langle \vec{r} | X | \psi \rangle = x \langle \vec{r} | \psi \rangle$

Entonces: cuánto vale $X | \vec{r}_0 \rangle$?

$$\langle \vec{r} | X | \vec{r}_0 \rangle = x \langle \vec{r} | \vec{r}_0 \rangle = x\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = x_0\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = x_0 \langle \vec{r} | \vec{r}_0 \rangle$$

$$\Rightarrow X | \vec{r}_0 \rangle = x_0 | \vec{r}_0 \rangle \text{, en gral: } \begin{cases} X | \vec{r} \rangle = x | \vec{r} \rangle \\ Y | \vec{r} \rangle = y | \vec{r} \rangle \\ Z | \vec{r} \rangle = z | \vec{r} \rangle \end{cases} \quad \forall \vec{r}$$

Entonces, $|\vec{r}\rangle$ es autovector común de X, Y, Z, que conmutan entre sí. Los "índices" que etiquetan el estado son (x, y, z).

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

Autovectores de $\vec{P}$

Lo mismo ocurre con los autovectores de P_x, P_y y P_z.
Trabajando en la representación $\{|\vec{p}\rangle\}$ se obtiene:

$$P_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle$$
$$P_y |\vec{p}\rangle = p_y |\vec{p}\rangle$$
$$P_z |\vec{p}\rangle = p_z |\vec{p}\rangle$$

Notar que esto mismo se puede demostrar trabajando en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$:

$$\langle\vec{r}|P_x|\vec{p}\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{i}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{i}{\hbar}p_x e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} = p_x\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle$$

$$\Rightarrow P_x|\vec{p}\rangle = p_x|\vec{p}\rangle \qquad ///$$

Representaciones |**r**> y |**p**> : Operadores **R** y **P**

$\vec{R}$ y $\vec{P}$ son observables

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } \{|\vec{r}\rangle\} \text{ y } \{|\vec{p}\rangle\} \text{ son bases} \\ \vec{R} \text{ y } \vec{P} \text{ son hermíticos} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{R} \text{ y } \vec{P} \text{ son observabl}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{X, Y, Z\} \\ \{P_x, P_y, P_z\} \end{array}\right\} \text{son C.C.O.C. de } \mathcal{E}_{\vec{r}}$$

Compatibilidad de observables

Compatibilidad de observables

Compatibilidad de observables

Sean A, B, $[A, B] = 0$

$\Rightarrow$ existe una base de autoestados comunes $\{|a_n, b_p, i\rangle\}$

$$A|a_n b_p i\rangle = a_n |a_n b_p i\rangle$$
$$B|a_n b_p i\rangle = b_p |a_n b_p i\rangle$$

Quiere decir que preparando el sistema en alguno de los estados $|a_n b_p i\rangle$ $(i = 1, \ldots, g_{np})$ es posible medir A y B y obtener con certeza a_n y b_p.

En otras palabras, podemos preparar el estado del sistema de modo que tenga bien definidos A y B.

$\rightarrow$ A y B son observables compatibles.

Medición de observables compatibles

Sea estado $|\psi\rangle$. Podemos escribir:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,p,i} |a_n b_p i\rangle\langle a_n b_p i|\psi\rangle$$

$$= \sum_{npi} C_{npi} |a_n b_p i\rangle$$

Medir	A	e	inmediatamente	B
	B	"	"	A

El resultado es el mismo:

$$\mathcal{P}(a_n, b_p) = \mathcal{P}(b_p, a_n) = \sum_i |C_{npi}|^2 \quad \text{probab.}$$

$$|\psi_{final}\rangle = \sum_i C_{npi} |a_n b_p i\rangle \Big/ \sqrt{\sum_i |C_{npi}|^2}$$

Medición de observables compatibles

$\Rightarrow$ Podemos hablar de una medición simultánea de A y B (porque son compatibles $\Leftrightarrow$ conmutan).

$\rightarrow$ extensión o generalización de 4to y 5to postulados.

Cuidado! si $[A,B] \neq 0$

el orden de la medición importa: influye sobre las probabilidades y sobre el estado final.

Preparación de un estado

Si mido un CCOC y obtengo los autovalores

$a_n, b_p, c_r, \ldots$

entonces sé con certeza que el estado después de la medición es el ket

$$|a_n b_p c_r \ldots\rangle$$

Esto es análogo al uso de polarizadores en óptica.

Resumen de la Clase 8

En esta clase vimos:

- Representaciones |**r**> y |**p**>
- Compatibilidad de observables