67 Dos momentos angulares $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$.

Autov. de $\vec{J}_i^2$ $\hbar j_i (j_i+1)$ con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$.

- Obtener los coef. de C. G.

$|j\ m\rangle$

$m_1 + m_2$

¿Cuántos estados tengo?

$$|j_1 - j_2| < j < j_1 + j_2 \Rightarrow 0 < j < 2$$

Vamos a tener estados con

$j = 0 \longrightarrow m = 0$

$j = 1 \longrightarrow m = -1, 0, 1$

$j = 2 \longrightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2.$

$\Rightarrow$ Tenemos 9 estados.

Queremos escribir estos estados (en base $|j\ m\rangle$) en la base $|m_1, m_2\rangle$.

Comenzamos con el estado de mayor proyección

Notación $\rightarrow |j\,m\rangle$

$|m_1\, m_2\rangle$

$|2\;2\rangle = |1\;1\rangle \leftarrow$

Partiendo del estado $|2\;2\rangle$ aplico el operador J_- para escribir todos los estados correspondientes al subespacio $j = 2$.

$$J_-|j\;m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\;|j\;m-1\rangle .$$

$$J_-|2\,2\rangle = 2|2\;1\rangle$$

$j_1 = 1\,;\, m_1 = 1$

$$= (J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-})|1\;1\rangle$$

$j_2 = 1\,;\, m_2 = 1$

$$= \sqrt{2}\,|0\;1\rangle + \sqrt{2}\,|1\;0\rangle$$

$$\Rightarrow |2\;1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\;1\rangle + |1\;0\rangle\right)$$

$$J_-|2\;1\rangle = \sqrt{6}\,|2\;0\rangle$$

$$= (J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\;1\rangle + |1\;0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|-1\;1\rangle + \sqrt{2}\,|0\;0\rangle + \sqrt{2}\,|0\;0\rangle + \sqrt{2}\,|1\;-1\rangle\right)$$

$$= \left(|-1\;1\rangle + 2|0\;0\rangle + |1\;-1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|-1\;1\rangle + 2|0\;0\rangle + |1\;-1\rangle\right)$$

$$\bullet\; J_-|2\,0\rangle = \sqrt{6}\,|2\;-1\rangle$$

$$= (J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-})\frac{1}{\sqrt{6}}\left(|-1\,1\rangle + 2|0\,0\rangle + |1\;-1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\sqrt{2}\,|-1\;0\rangle + \sqrt{2}\,|0\;-1\rangle + \sqrt{2}\,|-1\;0\rangle + 2\sqrt{2}\,|0\;-1\rangle\right)$$

$$\sqrt{6}\,|2\;-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\;3\sqrt{2}\left(|-1\;0\rangle + |0\;-1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |2\;-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1\;0\rangle + |0\;-1\rangle\right)$$

$$J_-|2\;-1\rangle = 2\,|2\;-2\rangle$$

$$= (J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1\;0\rangle + |0\;-1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|-1\,-1\rangle + \sqrt{2}\,|-1\;-1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |2\;-2\rangle = |-1\;-1\rangle$$

Construimos todos los estados que corresponden al subespacio con $j = 2$.

Para construir los estados con $j=1$ usamos la ortogonalidad.

$|1 \; 1\rangle \qquad m = m_1 + m_2$.

$\downarrow$ j $\quad \downarrow$ m

Tengo dos opciones para $m_{1,2}$

i) $m_1 = 1 \; ; \; m_2 = 0$

ii) $m_1 = 0 \; ; \; m_2 = 1$

(Recordemos que $m_1 = -1, 0, 1$, $m_2 = -1, 0, 1$).

$$|1 \; 1\rangle = \alpha |1 \; 0\rangle + \beta |0 \; 1\rangle$$

El estado $|1 \; 1\rangle$ es ortogonal a todos los estados que escribimos, en particular al $|2 \; 1\rangle$.

$$\langle 2 \; 1 | 1 \; 1\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1 \; 0| + \langle 0 \; 1|\right)\left(\alpha|1 \; 0\rangle + \beta|0 \; 1\rangle\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$$

El estado debe estar normalizado!

$\langle 1\,1|1\,1\rangle = 1$

$\left(\alpha\langle 1\,0| + \beta\langle 0\,1|\right)\left(\alpha|1\,0\rangle + \beta|0\,1\rangle\right) = 1.$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 1.}$

$\alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \; ; \; \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$|1\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,1\rangle\right)$$

Aplicamos el operador J_- a este estado.

$J_-|1\,1\rangle = \sqrt{2}\,|1\,0\rangle$

$= \left(J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,1\rangle\right)$

$= \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\left(\cancel{\sqrt{2}|0\,0\rangle} - \cancel{\sqrt{2}}|-1\,1\rangle + \cancel{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle - \cancel{\sqrt{2}|0\,0\rangle}\right)$

$$\Rightarrow |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)$$

$J_-|1\,0\rangle = \sqrt{2}\,|1\,-1\rangle$

$= \left(J_{1-}\otimes \mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes J_{2-}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|0\ -1\rangle - \sqrt{2}\,|-1\ 0\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |1\ -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\ -1\rangle - |-1\ 0\rangle\right)$$

Para escribir el estado $|0\ 0\rangle$ usamos ortogonalidad

$$|0\ 0\rangle = a\,|1\ -1\rangle + b\,|-1\ 1\rangle + c\,|0\ 0\rangle .$$

$\hookrightarrow m_{tot} = 0 = m_1 + m_2 .$

i) $m_1 = 1$; $m_2 = -1$

ii) $m_1 = -1$; $m_2 = 1$

iii) $m_1 = 0$; $m_2 = 0$.

$$\langle 2\,0 | 0\,0 \rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\langle -1\ 1| + \langle 1\ -1| + 2\langle 0\ 0|\right)\left(a\,|1\ -1\rangle + b\,|-1\ 1\rangle + c\,|0\ 0\rangle\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a + b + 2c = 0} \quad (1) \qquad \cancel{2}b + \cancel{2}c = 0$$

$$\boxed{b = -c}$$

$$\langle 1\,0 | 0\,0 \rangle = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1\ -1| - \langle -1\ 1|\right)\left(a|1\ -1\rangle + b|-1\ 1\rangle + c|0\ 0\rangle\right) = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow \boxed{a = b} \quad (2)$$

El estado está normalizado.

$$\Rightarrow \langle 0\ 0|0\ 0\rangle = 1.$$

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1} \quad (3)$$

$$3a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b} \quad \boxed{c = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\ -1\rangle + |-1\ 1\rangle - |0\ 0\rangle\right)$$

68 $A \to B + C$

$B \to$ espin $1/2$ $A \to$ espin $3/2$; mom. ang. 0.

$C \to$ espin 0.

a) Valores del momento angular orbital que puede tomar el par BC.

BC $\to$ espin $s = 1/2$.
$\hookrightarrow$ l

Como el momento angular total se conserva en la desintegración, y A tiene espin $3/2$ y mom. angular 0, la idea es que al acoplar s y l obtenga $j_{tot} = 3/2$.

$|l-s| < j < l+s$

$j = \frac{3}{2}$; $s = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $l =$

$l =$

$$BC \rightarrow \begin{matrix} s = 1/2 \\ \ell \end{matrix} \longrightarrow j = 3/2$$

$$|\ell - s| \leq j \leq \ell + s$$

$$\left|\ell - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \leq \ell + 1/2 \qquad \frac{3}{2} = \ell + \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2} = \ell - 1/2 .$$

$$\Rightarrow \ell = 1 \quad \text{ó} \quad \ell = 2 .$$

b) La partícula A tiene $j = 3/2$

$$\Rightarrow m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Antes de decaer, el estado de la partícula A era

$$\left|\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$$

Luego de la reacción la partícula B está en el estado $\left|s = \frac{1}{2}\ m_B = -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Usamos la tabla de C-G para escibir el estado $|3/2\ 3/2\rangle$ en base desacoplada.

• $l = 1$

$|3/2\ 3/2\rangle = |1\ 1/2\rangle$ → Si B se encuentra en su mínima proyección de espín, no es posible que sea $l = 1$.

• $l = 2$

$$|3/2\ 3/2\rangle = \sqrt{\frac{4}{5}}\,|2\ \underbrace{-1/2}_{S_z}\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}|1\ 1/2\rangle$$

⇒ El momento angular orbital del par BC es $l=2$.

c) $P(\uparrow_B)$ para todos los casos posibles de m_A y l.

$\underline{l = 1}$

$m_A = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$.

$|3/2\ 3/2\rangle = |1\ 1/2\rangle$ ⇒ $P(\uparrow_B) = 1$.

$|3/2\ 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\ -1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0\ 1/2\rangle$ ⇒ $P(\uparrow_B) = 2/3$.

$|3/2\ -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\ -1/2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-1\ 1/2\rangle$ ⇒ $P(\uparrow_B) = 1/3$.

$|3/2\ -3/2\rangle = |-1\ -1/2\rangle$ ⇒ $P(\uparrow_B) = 0$.

$\boxed{l=2}$

$$|3/2 \;\; 3/2\rangle = \sqrt{\frac{4}{5}}\,|2 \;\; -1/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1 \;\; 1/2\rangle \Rightarrow P(\uparrow_B) = 1/5 .$$

$$|3/2 \;\; 1/2\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|1 \;\; -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|0 \;\; 1/2\rangle \Rightarrow P(\uparrow_B) = 2/5 .$$

$$|3/2 \;\; -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|0 \;\; -1/2\rangle - \sqrt{\frac{3}{5}}\,|-1 \;\; 1/2\rangle \Rightarrow P(\uparrow_B) = 3/5 .$$

$$|3/2 \;\; -3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\,|-1 \;\; -1/2\rangle - \sqrt{\frac{4}{5}}\,|-2 \;\; 1/2\rangle \Rightarrow P(\uparrow_B) = 4/5 .$$