Álgebra de Lorentz

Si ya cursaron Física Teórica 1, habrán visto el papel crucial que cumplen las transformaciones de Lorentz. El conjunto de transformaciones de Lorentz tiene estructura de grupo, y está compuesto por las rotaciones en el espacio tridimensional y los denominados boots, que describen el pasaje de un sistema inercial a otro que se mueve con cierta velocidad relativa respecto al primero. Dicho grupo de transformaciones tiene asociada un álgebra de Lie, que llamamos álgebra de Lorentz.

Los generadores del álgebra de Lorentz son 6: tres asociados a rotaciones (que se denotan J_1, J_2 y J_3) y 3 asociados a boosts (que se denotan K_1, K_2 y K_3). Los conmutadores entre dichos generadores son

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk} J_k \, , \\
[K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk} J_k \, , \\
[J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k \, .
\end{aligned}
$$

La primera relación nos dice que la diferencia que hay al hacer dos rotaciones en distinto orden es otra rotación. La segunda, nos dice que el orden en el cual uno hace dos boosts es relevante, hacerlos cambiando el orden difiere en hacer una rotación extra. Por último, la tercera dice algo similar cuando lo que se quiere hacer es un boost seguido de una rotación; no es lo mismo hacer primero la rotación y luego el boost, habrá que compensar con un boost adicional.

A primera vista, lo que podemos entender del álgebra de Lorentz (viendo la primera de las tres relaciones de conmutación anteriores) es que tiene como subálgebra a $su(2)$; esto tiene sentido, las rotaciones son un subgrupo del grupo de Lorentz. Pero las otras relaciones de conmutación no parecen demasiado transparentes. Sin embargo, con lo que ya sabemos (y alguna pista) es posible entender un poco mejor este álgebra. Definiendo

$$
\bar{A} = \frac{1}{2}(\bar{J} - i\bar{K}) \, , \quad \bar{B} = \frac{1}{2}(\bar{J} + i\bar{K}) \, ,
$$

es posible ver que las relaciones de conmutación del álgebra de Lorentz se transforman en

$$
\begin{aligned}
[A_i, A_j] &= i\epsilon_{ijk} A_k \, , \\
[B_i, B_j] &= i\epsilon_{ijk} B_k \, , \\
[A_i, B_j] &= 0 \, .
\end{aligned}
$$

Les dejamos que vean esto como ejercicio. Esto nos dice que el álgebra de Lorentz se puede pensar como dos álgebras $su(2)$ (más precisamente, el álgebra de Lorentz es la suma directa de dos álgebras $su(2)$). En estas clases, vimos que hay un número particular j, que juega un papel importante para $su(2)$: permite clasificar las *representaciones* del álgebra. Las representaciones del álgebra de Lorentz se van a etiquetar entonces por dos números semienteros (j_1, j_2), que corresponderán al momento angular j_i de cada $su(2)$.