HOJA N°

FECHA

guía 2: Ejercicio a entregar

1) Proyectores spin 1. Una partícula con spin 1 tiene un momento angular intrínseco, cuyas proyecciones pueden tomar los valores $+\hbar, 0, -\hbar$. Representamos este sistema físico mediante un espacio de Hilbert de dim 3. En la base que diagonaliza S_z $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$, los operadores proyección de spin 1 se escriben de la forma:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} S_z|+\rangle = \hbar|+\rangle \\ S_z|0\rangle = 0 \\ S_z|-\rangle = -\hbar|-\rangle \end{cases}$$

a) Verifique que los tres operadores S_j ($j = x, y, z$) representan observables (es decir son operadores hermíticos)

Rta:

Para que sean observables, $S_j = S_j^{\dagger}$

y

$$S_x^{\dagger} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*\right]^t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = S_x \quad \checkmark$$

$$S_y^{\dagger} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}^*\right]^t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = S_y \quad \checkmark$$

$$S_z^{\dagger} = \hbar \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^*\right]^t = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S_z \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ los tres S_j representan observables.

b) Como conoce los autovalores de S_x, use el P2(d) para expresar los proyectores sobre cada auto-estado de S_x correspondiente a los tres autovalores: $|+,x\rangle$ (autovalor $\hbar$), $|0,x\rangle$ (autovalor 0), $|-,x\rangle$ (autovalor $-\hbar$). Aplique este proyector sobre el estado $|+\rangle$ para encontrar la correspondiente autovector. Normalice los autovectores así obtenidos.

NOTA

P4

Recuerda que para un operador hermítico A con $\{a_i\}$ sus autovalores y $\{|a_i\rangle\}$ la base ortonormal de autoestados

$$P_j = \prod_{i \neq j} \frac{(A - a_i)}{(a_j - a_i)}$$ es el proyector sobre el autoestado de autovalor a_j

Entonces, la proyección sobre los autoestados de S_x son:

$$P_{-1} = \frac{S_x - 0\mathbb{I}}{-\hbar - 0} \cdot \frac{S_x - \hbar\mathbb{I}}{-\hbar - \hbar} = \left(-\frac{S_x}{\hbar}\right) \cdot \left(-\frac{S_x - \hbar\mathbb{I}}{2\hbar}\right) = \frac{S_x}{\hbar} \cdot \frac{S_x - \mathbb{I}\hbar}{2\hbar}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

$$P_0 = \frac{S_x - (-\hbar)\mathbb{I}}{0 - (-\hbar)} \cdot \frac{S_x - (\hbar)\mathbb{I}}{0 - \hbar} = \frac{(S_x + \hbar\mathbb{I})}{\hbar} \cdot \frac{(\hbar\mathbb{I} - S_x)}{\hbar} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$P_1 = \frac{S_x - (-\hbar)\mathbb{I}}{\hbar - (-\hbar)} \cdot \frac{S_x - (0)\mathbb{I}}{\hbar - (0)} = \left(\frac{S_x + \hbar\mathbb{I}}{2\hbar}\right) \cdot \frac{S_x}{\hbar} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}}$$

Entonces, para obtener los autovectores de S_x aplicamos un proyector al estado $|+\rangle$:

$$P_{-1} |+\rangle = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[|+\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle \right]$$

y normalizado:

$$\boxed{|-, x\rangle = \frac{1}{2} \left[|+\rangle - \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle \right]}$$

$$P_0|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[|+\rangle - |-\rangle\right]$$

Que normalizado es: $\boxed{|0,x\rangle = \dfrac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}}$

y $$P_1|+\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left[|+\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle\right]$$

Que normalizado es: $\boxed{|+,x\rangle = \dfrac{1}{2}\left[|+\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |-\rangle\right]}$

c) Calcule $S_y|+\rangle$, $S_y|0\rangle$ y $S_y|-\rangle$

Rta:

$$S_y|+\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

$$S_y|0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\\0\\i\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[-|+\rangle + |-\rangle\right]$$

$$S_y|-\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-i\\0\end{pmatrix} = -i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

d) Exprese S_x como suma de ketbras de la base.

Rta:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

y se sabe que, matricialmente, el ketbra $|i\rangle\langle j|$ es

$$\begin{array}{cc} & i \\ j & \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle +| + |0\rangle\langle -| + |-\rangle\langle 0|\right]}$$

c) Pruebe que $\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)^3 = \frac{S_y}{\hbar}$, y usando el ejercicio P13(b) (con $B = S_y/\hbar$) obtenga una expresión para el operador $R(\theta,\hat{y}) = e^{-i\theta S_y/\hbar}$. Evalúe $R(\theta,\hat{y})|+\rangle$, $R(\theta,\hat{y})|0\rangle$ y $R(\theta,\hat{y})|-\rangle$, para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Compare sus resultados con los autoestados de S_x.

Rs.

Primero pruebo que $\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)^3 = \frac{S_y}{\hbar}$:

$$\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)^3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\right]^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{S_y}{\hbar} \checkmark$$

y por el P13(b) sabemos que si B es un operador / $B^3 = B$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y F una función expresable en serie de potencias:

$$F(\alpha B) = F(0)\,\mathbb{I} + \frac{1}{2}\left(F(\alpha) + F(-\alpha) - F(0)\right)B^2 + \frac{1}{2}\left(F(\alpha) - F(-\alpha)\right)B$$

y en particular

$$e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + \left(\cos(\alpha) - 1\right)B^2 - i\sin(\alpha)\,B$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{-iS_y/\hbar} = \mathbb{I} + \left[\cos\left(\frac{1}{\hbar}\right) - 1\right]}$$

$$e^{-i\theta(S_y/\hbar)} = \mathbb{I} + (\cos(\theta) - 1)\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)^2 - i\sin(\theta)\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)$$

$$e^{-i\theta\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)} = \mathbb{I} + (\cos\theta - 1)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-i\theta\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)} = \mathbb{I} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - i\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R(\theta,\hat{y}) = e^{-i\theta\left(\frac{S_y}{\hbar}\right)} = \mathbb{I} - \sin^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Entonces:

$$R(\theta,\hat{y})|+\rangle = \left[\mathbb{I} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\hat{y})|+\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\hat{y})|+\rangle = \left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)|+\rangle + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}|0\rangle + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle$$

$$\boxed{R(\theta,\hat{y})|+\rangle = \cos^2\frac{\theta}{2}\,|+\rangle + \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}}|0\rangle + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\,|-\rangle}$$

$$R(\theta,\hat{y})|0\rangle = \left[\mathbb{I} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\hat{y})|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{R(\theta,\hat{y})|0\rangle = |0\rangle\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right]}$$

$$R(\theta,\hat{y})|-\rangle = \left[\mathbb{I} - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\hat{y})|-\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$R(\theta,\hat{y})|-\rangle = \left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

$$\boxed{R(\theta,\hat{y})|-\rangle = \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\,|+\rangle - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,|-\rangle}$$

Por lo que si $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$R\left(\tfrac{\pi}{2},\hat{y}\right)|+\rangle = \frac{1}{2}\left[|+\rangle + \sqrt{2}|0\rangle + |1\rangle\right]$$

$$R\left(\tfrac{\pi}{2},\hat{y}\right)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|-\rangle - |+\rangle\right]$$

$$R(\tfrac{\pi}{2},\hat{y})\,|-\rangle = \frac{1}{2}\left[\,|+\rangle - \sqrt{2}\,|0\rangle + |-\rangle\,\right]$$

Que ya presentó la autoestado de S_x. Es decir que:

$$\left\{\begin{array}{l} |+,z\rangle \longrightarrow R(\tfrac{\pi}{2},\hat{y}) \longrightarrow |+,x\rangle \\ |0,z\rangle \longrightarrow R(\tfrac{\pi}{2},\hat{y}) \longrightarrow |0,x\rangle \\ |-,z\rangle \longrightarrow R(\tfrac{\pi}{2},\hat{y}) \longrightarrow |-,x\rangle \end{array}\right\}$$

2) Representación de coordenadas de momento. Considere una partícula de masa m y carga q, que se mueve en una dirección sujeta a un campo eléctrico constante $E_x = E_0$.

a) Exprese el Hamiltoniano H del sistema en representación de coordenadas y en representación de momento.

Rx: Para obtener el Hamiltoniano cuántico primero obtengo el Hamiltoniano clásico:

Primero el Lagrangiano: $\mathcal{L} = T - V = \dfrac{p^2}{2m} - V$ y el potencial V para el electromagnetismo es:

$$V = q\,(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) \quad \text{donde} \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{array}\right.$$

Como $\vec{B}=0$ y $\vec{E} = E_0\,\hat{x}$: $\quad \vec{A} = \vec{0}$
$\phi = -E_0 x$

$$\Rightarrow \quad V = -qE_0 x$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} + qE_0 x$$

y sabemos que el Hamiltoniano es $\mathcal{H} = \underbrace{\dot{x}}_{\frac{p}{m}} p - \mathcal{L} = \dfrac{p^2}{m} - \mathcal{L} = \dfrac{p^2}{2m} - qE_0 x$

Entonces el Hamiltoniano clásico: $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m} - qE_0 x$

Para pasar al cuántico hacemos el cambio $\quad x \longrightarrow \hat{X}$
$p \longrightarrow \hat{P}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} - qE_0 \hat{X}}$$

NOTA

En representació de coordenades: $\langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle = \langle x|\hat{P}(\hat{P}|\psi\rangle) = \langle x|\hat{P}|\xi\rangle$

Con $|\xi\rangle = \hat{P}|\psi\rangle$

y sabemos que $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \dfrac{\partial\psi(x)}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad \langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial \xi(x)}{\partial x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\langle x|\xi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|\hat{P}|\psi\rangle$$

$$\langle x|\hat{P}^2|\psi\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$$

Entonces, el Hamiltoniano en representació de coordenades es:

$$\boxed{\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - qE_0 x}$$

En representació de momenta: $\langle p|X|\psi\rangle = +i\hbar\dfrac{\partial\psi(p)}{\partial p}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - i\hbar q E_0 \frac{\partial}{\partial p}}$$

b) Obtenga los autoestados del operador $\mathcal{H}$ en la representació de momenta para un valor de energía E.

Rta: si $|\psi\rangle$ es un autoestado de $\mathcal{H}$ con energía E:

$$\mathcal{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

En representació de momenta:

$$\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar q E_0 \frac{\partial}{\partial p}\right)\psi(p) = E\,\psi(p)$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)\psi(p) = i\hbar q E_0 \frac{\partial\psi(p)}{\partial p}$$

$$\Rightarrow \quad \int i\left(\frac{E}{\hbar q E_0} - \frac{p^2}{2m\hbar q E_0}\right)dp = \int \frac{\frac{\partial\psi(p)}{\partial p}}{\psi(p)}\,dp$$

$$i\left(\frac{E}{\hbar q E_0}p - \frac{p^3}{6m\hbar q E_0}\right) + C = \ln(\psi(p))$$

$$\Rightarrow \quad \psi(p) = K \exp\left[\frac{ip}{\hbar q E_0}\left(E - \frac{p^2}{6m}\right)\right] \qquad \text{con } K \in \mathbb{C}$$

NOTA

pero como las fases globales no son relevantes, solo importa el modulo de K.

$$\boxed{\psi(p) = |K| \exp\left[\frac{i}{6m\hbar q E_0} p\left(6mE - p^2\right)\right]}$$

Esta autoestado del Hamiltoniano en la representación de momento no son normalizable:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\psi|p\rangle\langle p|\psi\rangle dp = \int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 \exp\left[\frac{-i}{6m\hbar q E_0} p\left(6mE - p^2\right)\right] \exp\left[\frac{i}{6m\hbar q E_0} p\left(6mE - p^2\right)\right] dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 dp = \infty$$

c) Use lo obtenido en el ítem anterior, para hallar una expresión integral de la autoestado de H en la representación de posición

Rs:

Queremos $\langle x|\psi\rangle$:

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x|p\rangle\langle p|\psi\rangle dp \qquad \text{ya que} \int_{-\infty}^{\infty} |p\rangle\langle p| dp = \mathbb{I}$$

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \psi(p)\, dp$$

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{ip}{\hbar}\left(\frac{6mE - p^2}{6mqE_0} + x\right)\right] dp$$

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{ip}{\hbar}\left(\frac{6m(E + \overbrace{qE_0x}^{-V(x)}) - p^2}{6mqE_0}\right)\right] dp$$

$$\boxed{\langle x|\psi\rangle = \frac{|K|}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{ip}{6m\hbar q E_0}\left[6m\left(E - V(x)\right) - p^2\right]\right] dp}$$

d) dibuje el potencial y haga un esquema de las funciones de onda en representación de coordenadas.

Rta:

La ecuación para la función de onda en la representación de coordenadas es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} - qE_0 x\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

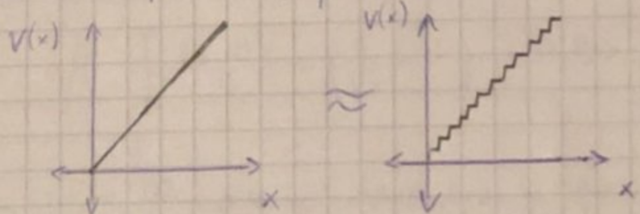
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = \psi(x)\underbrace{\left[-(E+qE_0 x)\frac{2m}{\hbar^2}\right]}_{-K(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\psi(x)\,K(x)$$ → En donde notamos que $K(x)$ es proporcional a $E-V(x)$.

y sabemos que la solución de una ecuación de la forma: (con $K>0$)

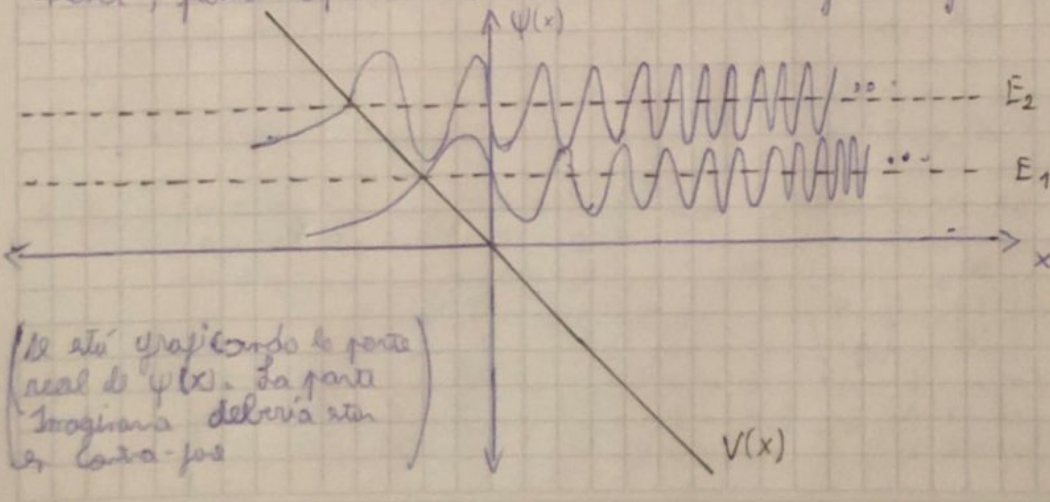
$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = -\psi(x)\,K$$ es una sinusoidal de frecuencia $\sqrt{K}$

Si aproximamos el potencial, que es una lineal en X por una "escalera":



En cada "escaloncito" $K(x)$ pasa a ser K. Por lo que en cada escaloncito podemos tratar a $\psi(x)$ como una sinusoide de frec $\sqrt{K}$.

Entonces, podemos aproximar las soluciones de la siguiente forma:



(Se está graficando la parte real de $\psi(x)$. La parte imaginaria debería estar en contra-fase)

En donde se tuvo en cuenta además que como clásicamente la probabilidad de una partícula de estar en un segmento es menor cuanto mayor sea su velocidad, en la cuántica, como la velocidad y la frecuencia están relacionadas por

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (\text{De Broglie})$$

La probabilidad de encontrar a una partícula en un segmento debe ser mayor cuanto mayor es la longitud de onda (es decir, menor es la frecuencia). Entonces, la amplitud de $\psi(x)$ debe decaer a medida que aumenta la frecuencia.

Y también se vio que si la energía E es menor que el potencial, entonces $K<0$ y la solución de:

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = - \psi(x)\, K$$

es una exponencial decreciente de la forma $\psi(x) \propto e^{-\sqrt{|K|}\, x}$.