**P7.** Consideremos una base de autoestados de $\hat{B}$:

$$\{ |b_{j,\mu_j}\rangle : \underbrace{j = 1, \dots, N}_{\text{autovalores}}, \ \mu_j = 1, \dots, g_j \}$$

"degeneración" del autoval. $j$

ie $\hat{B}|b_{j,\mu_j}\rangle = b_j \underbrace{|b_{j,\mu_j}\rangle}_{} \quad \forall \mu_j = 1, \dots, g_j$

$\exists\, g_j$ # autovectores con el mismo autoval.

OBS.: En principio, lo más general es asumir que el espectro puede estar degenerado

- Veamos que si $\exists\, \hat{A}_1$ y $\exists\, \hat{A}_2$ : operadores que

No conmutan entre sí pero conmutan (ambos) con $\hat{B}$

ie $[\hat{A}_1, \hat{A}_2] \neq 0$

pero $[\hat{A}_1, \hat{B}] = [\hat{A}_2, \hat{B}] = 0$

$\Longrightarrow$ B tiene su espectro degenerado

esto es: al menos tiene un autoval. $b_i$ con degeneración $g_i$

Para ello usaremos que:

Si $A_1$ conmuta con B $\Longrightarrow$ $A_1$ es diagonal (*) en la base $\{|b_{j,\mu_j}\rangle\}$ $\boxed{\text{Por bloques}}$ !

y si $A_2$ " " " $A_2$ " " " " "

(En la teórica se probó: "Compatibles" $\Longleftrightarrow$ "Conmutan")

Escaneado con CamScanner

Notar que si $A_1$ y $B$ conmutan (i.e $[A_1, B] = 0$)

$$\Rightarrow \hat{B}\hat{A}_1 |b_{j,\mu_j}\rangle = \hat{A}_1 \hat{B} |b_{j,\mu_j}\rangle = \hat{A}_1 b_j |b_{j,\mu_j}\rangle$$

$\Rightarrow$ $A_1$ debe dejar invariante al subespacio asociado a $j$, para cada $j = 1, \dots, N$; Idem. para $A_2$

luego, si

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_1 \mathbb{1}_{g_1 \times g_1} & & & \\ \hline & b_2 \mathbb{1}_{g_2 \times g_2} & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & b_N \mathbb{1}_{g_N \times g_N} \end{array}\right)$$

en la base $\{ |b_{j,\mu_j}\rangle \}$

$\Rightarrow$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{A^{(1)}_{g_1 \times g_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A^{(1)}_{g_N \times g_N}} \end{pmatrix}$$

bloques de $g_i \times g_i$

y

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{A^{(2)}_{g_1 \times g_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A^{(2)}_{g_N \times g_N}} \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

Supongamos que $B$ No está degenerado (ie todos sus autovalores tienen deg. $g_j = 1$) $\Rightarrow$ $B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_N \end{pmatrix}$

Y luego las matrices $A_1, A_2$ quedan diagonalizadas simultaneamente por la base $\{ |b_j\rangle \}$

esto es:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

Pero entonces $[A_1, A_2] = 0$

Por que son números!

pues $[A_1, A_2] = \begin{pmatrix} \underbrace{[a_1^{(1)}, a_1^{(2)}]}_{=0} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{[a_N^{(1)}, a_N^{(2)}]}_{=0} \end{pmatrix} = 0$

Pero esto es contradictorio con la hip. del enunciado $[A_1, A_2] \neq 0$

$\therefore \exists$ un $b_j$ autoval. de $B$ con deg. $g_j > 1$

Escaneado con CamScanner

**P.8** Sea $U$ : operador unitario, ie $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$

(a) Veamos que los autovalores de $U$: $\lambda_j$ son tq $|\lambda_j| = 1$

En efecto consideremos un auestado de $U$: $|v_j\rangle$ con autoval. $\lambda_j$

$$U|v_j\rangle = \lambda_j |v_j\rangle \iff \underbrace{U^\dagger U}_{\mathbb{1}}|v_j\rangle = \lambda_j U^\dagger |v_j\rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_j|v_j\rangle = \lambda_j \langle v_j|U^\dagger|v_j\rangle = \underbrace{\lambda_j \cdot \lambda_j^*}_{|\lambda_j|^2} \langle v_j|v_j\rangle$$

donde $(U|v_j\rangle)^* = \langle v_j|U^\dagger = \lambda_j^* \langle v_j|$

$$\therefore \langle v_j|v_j\rangle = |\lambda_j|^2 \langle v_j|v_j\rangle \Longrightarrow |\lambda_j|^2 = 1$$

(b) $\forall$ $U$: unitaria $\exists$ $M$: hermítica tq $U = e^{iM}$

Veamos que $e^{iM}$ es unitaria: $(e^{iM})^\dagger = e^{-iM^\dagger} \overset{M=M^\dagger}{=} e^{-iM}$

$$\Rightarrow (e^{iM})^\dagger (e^{iM}) = e^{-iM} e^{iM} = \mathbb{1} \checkmark$$

Pero quiero ver que <u>toda</u> unitaria admite ser escrita como $U = e^{iM}$

- Si es Unitaria $\Rightarrow$ es diagonalizable

esto es $\exists$ una matriz de cambio de base $V$ /

$$V^\dagger U V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} \underset{\text{Por Item(a)}}{=} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N} \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

luego como las matrices de c. de b. también son unitarias

$$\Rightarrow \quad U = V \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} V^\dagger$$

Pero notemos que : $e^{iV\,\mathrm{diag}(\theta_1,\dots,\theta_N)V^\dagger} = V\, e^{i\,\mathrm{diag}(\theta_1,\dots\theta_N)}\, V^\dagger$

pues $e^{iVQV^\dagger} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} i^k (VQV^\dagger)^k = V\left(\sum_{k=0}^{\infty} i^k Q^k\right)V^\dagger$

$$(VQV^\dagger)^k = \underbrace{(VQV^\dagger)\ \dots\ (VQV^\dagger)}_{k\text{-Veces}} = \dots$$

$$\dots = V\,(Q\overbrace{V^\dagger V}^{\mathbb{1}} \dots \overbrace{V^\dagger V}^{\mathbb{1}} Q)\,V^\dagger = V Q^N V^\dagger$$

$\forall\, Q$ , $\forall\, V$ : unitaria (ie $V^\dagger = V^{-1}$)

$$\therefore \quad \boxed{U = e^{i[V\,\mathrm{diag}(\theta_1,\dots,\theta_N)V^\dagger]} \equiv e^{iM}}$$

donde $\underbrace{\left(V\,\mathrm{diag}(\theta_1,\dots,\theta_N)V^\dagger\right)^\dagger}_{M^\dagger} = V\,\mathrm{diag}(\dots)\,V^\dagger = M$

ie $M^\dagger = M$ : op. hermítico $\square$

c) $e^{iM} = U \Rightarrow U^\dagger = e^{-iM^\dagger} = e^{-iM} = U^{-1}$

$\Rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

Escaneado con CamScanner

P7. (resolución alternativa)

Sean $A_1, A_2$ operadores tq $[A_1, A_2] \neq 0$ pero $\exists$ B otro operador q.e conmuta con ambos:

$[A_1, B] = [A_2, B] = 0 \Rightarrow$ Veamos que B tiene el espectro degenerado:

$$\boxed{\text{Si } [A_1, A_2] \neq 0 \Rightarrow \text{No se diagonalizan simultaneamente}}$$

tomemos una base $\{ |a_j^{(1)}, b_j\rangle \}$ que diagonaliza simultaneamente a $A_1$ y a B pero <u>No</u> a $A_2$

$$\Rightarrow \quad A_1 |a_j^{(1)}, b_j\rangle = a_j^{(1)} |a_j^{(1)}, b_j\rangle$$

$$A_2 |a_j^{(1)}, b_j\rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |a_i^{(1)}, b_i\rangle = \dots$$

$$\dots = \alpha_j |a_j^{(1)}, b_j\rangle + \underbrace{\sum_{i \neq j}^{N} \alpha_i |a_i^{(1)}, b_i\rangle}$$

y $|\psi\rangle = (A_2 - \alpha_j \mathbb{1}) |a_j^{(1)}, b_j\rangle \equiv |\psi\rangle$

donde por construcción $\langle a_j^{(1)}, b_j | \psi\rangle = 0$

luego, aplicando $\hat{B}$: $\boxed{B|\psi\rangle = (\hat{B}\hat{A}_2 - \alpha_j \hat{B}) |a_j^{(1)}, b_j\rangle = (A_2 - \mathbb{1}\alpha_j) \overbrace{B |a_j^{(1)}, b_j\rangle}^{b_j |a_j^{(1)}, b_j\rangle} = b_j |\psi\rangle}$

pues: $\hat{B}\hat{A}_2 |a_j^{(1)}, b_j\rangle = \hat{A}_2 \hat{B} |a_j^{(1)}, b_j\rangle = \hat{A}_2 b_j |a_j^{(1)}, b_j\rangle$

<u>Pero</u> $\boxed{\hat{B} |a_j^{(1)}, b_j\rangle = b_j |a_j^{(1)}, b_j\rangle \Rightarrow \exists \text{ 2 autoestados de } \hat{B} \text{ con autoval } b_j}$