Guía 2 - 07/04

Bryan Malpartida

$\boxed{P10}$ Sean dos operadores A y B tal que A conmuta con [A,B]

$\Rightarrow \quad A[AB] = [AB]A$

Prop: $[A^{n+1}, B] = (n+1)A^n[A,B]$

Demostremos esto usando el ppio de inducción

Caso base: $(n=0)$ $\quad [A^{0+1}, B] = [A,B] = (0+1)A^0[A,B]$ ✓

Hipótesis Inductiva: Supongo que vale para n; ie,

$$[A^n, B] = nA^{n-1}[AB] \quad \text{es Verdadero}$$

Paso inductivo: $[A^{n+1}, B] = A^{n+1}B - BA^{n+1}$

$$= AA^nB - BAA^n$$

$$= AA^nB - (AB - [AB])A^n$$

$$= A(A^nB - BA^n) + \underbrace{[AB]A^n}_{\text{Conmutan}}$$

$$= A[A^n, B] + A^n[AB]$$

Lo uso hipótesis inductiva

$$= nAA^{n-1}[AB] + A^n[AB]$$

$$\boxed{[A^{n+1}, B] = (n+1)A^n[A,B]}$$

■

Tomemos ahora una función que admite un desarrollo en serie de potencia, ie

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} x^m \qquad \text{con} \qquad f_m = \left.\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right|_{x=0}$$

Se define f evaluado en un operador A como

$$f(A) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} A^m$$

$\Rightarrow$

$$[f(A),B] = \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} A^m, B\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} [A^m, B]$$

$\hookrightarrow$ Usamos la prop anterior

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} m A^{m-1} [AB]$$

$$= \left\{\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} m A^{m-1}\right\} [A,B]$$

Volviendo a la expansión de $f(x)$, obtenemos la derivada

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f_m}{m!} m x^{m-1}$$

$$[f(A),B] = \frac{df}{dx}(A) [A,B] \qquad \blacksquare$$

$\boxed{P11}$ $$C(s) := e^{sA} B e^{-sA}$$

$s \in \mathbb{R}$
A y B operadores

(i) Reescribo, $C(s) e^{sA} = e^{sA} B$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(C(s) e^{sA}\right) = \frac{d}{ds}\left(e^{sA} B\right)$$

$$\frac{d}{ds} C(s)\, e^{sA} + C(s) A e^{sA} = A \underbrace{e^{sA} B}_{C(s) e^{sA}}$$

$$\frac{dC}{ds}(s)\, e^{sA} = A(s) e^{sA} - C(s) A e^{sA}$$

$$\frac{dC(s)}{ds} e^{sA} = [A, C(s)]\, e^{sA}$$

$$\boxed{\frac{dC(s)}{ds} = [A, C(s)]}$$

La dependencia de $\frac{dC}{ds}$ con s está en el segundo término del conmutador

$$\rightarrow \frac{d^2 C}{ds^2}(s) = \left[A, \frac{dC}{ds}(s)\right] = \left[A, [A, C(s)]\right]$$

Así siguiendo, usando ppio de inducción, podemos mostrar que

$$\frac{d^m}{ds^m} C(s) = \underbrace{[A, [A, \cdots [A,}_{m\,[A,} C(s) \underbrace{]\cdots]}_{m\,]}$$

Notación: $L^n\{X,Y\} = [X, L^{n-1}\{X,Y\}]$ con $L^0\{X,Y\} = Y$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^n C(s)}{ds} = L^n\{A, C(s)\}$$

Ahora, expandiendo $C(s)$ alrededor de $s=0$

$$C(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n C(s)}{ds^n}\right|_{s=0} s^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} L^n\{A, C(0)\} s^n$$

Pero en $s=0$, $C(0) = e^0 B e^{-0} = B$

$$\Rightarrow C(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} L^n\{A,B\} s^n$$

finalmente en $s=1$;

$$C(1) = e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} L^n\{AB\} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

Si $[A,B] = cB$ con $c \in \mathbb{C}$

$$\rightarrow \quad L^1\{A,B\} = cB$$

$$L^2\{A,B\} = c^2 B$$

$$\vdots$$

$$L^n\{A,B\} = c^n B$$

$$\Rightarrow \quad e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} c^n B = e^c B$$