Física Teórica 2 - Guía 6: Oscilador armónico, aplicaciones: estados de Landau, y campo electrómagnético cuantizado

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

16 de mayo de 2022

1. Breve resumen: Oscilador armómico

El Hamiltoniano de un oscilador armónico 1D de masa m y frecuencia ω está dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

la solución en mecánica clásica de este problema es:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \qquad p = m\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

donde las constantes se determinan por las condiciones iniciales $x(0)$ y $p(0)$. La curva en el espacio de fases es una elipse con energía constante $E = m\omega^2 A^2/2$.

En Mecánica Cuántica, el método algebraico para encontrar los autoestados del Hamiltoniano consiste en identificar los operadores a y $a^\dagger$, adimensionales dados por:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(x + i\frac{p}{m\omega})$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(x - i\frac{p}{m\omega})$$

con $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ una distancia característica en este problema. No es dificil probar que $[a, a^\dagger] = 1$, usando la conmutación canónica $[x, p] = i\hbar$.

Se puede despejar x y p, y obtener que

$$H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \qquad\qquad N = a^\dagger a \tag{1}$$

Usando las relaciones de conmutación $[N, a] = -a$ y $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ se obtiene que el espectro del operador de número N son los enteros $n \geq 0$, y sus autoestados $|n\rangle$ satisfacen las relaciones:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

lo que da lugar a llamar a a operador de bajada (destrucción) y a $a^\dagger$ operador de subida (creación). El proceso de bajar el valor de n siempre termina en $n = 0$, pues $a\,|0\rangle = 0$. Del mismo modo se puede subir desde $n = 0$ a un n general:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n}\,|0\rangle$$

Los estados $|n\rangle$ son autoestados de la energía con autovalor $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Las propiedades de los estados $|n\rangle$ no proveen una ajustada descripción del movimiento clásico. Los valores medios de la posición y del momento en estos estados es nula y no depende del tiempo. La incerteza mínima para la posición y el momento sólo se dá para el fundamental $|0\rangle$, para estados excitados dicha incerteza es creciente. Sin embargo se pueden definir estados que resuelven estas debilidades. Los nuevos estados son los llamados estados coherentes $|\alpha\rangle$, cuya propiedad fundamental es que son autoestados del operador de bajada a, de modo que $a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ (a no es operador hermítico). Es posible expresar el estado normalizado $|\alpha\rangle$ en la base de número de ocupación $\{|n\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

Veremos dos aplicaciones del oscilador armónico: i) el problema de los niveles de Landau, y ii) un problema de campo electromagnético cuantizado. La introducción teórica del último problema está en el apunte de las teóricas del curso.

2. Problema 10

Niveles de Landau: electrón libre en un campo magnético. El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x, y, z)\right)^2.$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1, 2, 3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y)\hat{\boldsymbol{x}} + A_y(x, y)\hat{\boldsymbol{y}}$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

(a) El Hamiltoniano es inmediato (usamos el SI de unidades y la carga del electrón es $e < 0$):

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i \Pi_i^2 \qquad \Pi_i = p_i - eA_i \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

(b) Cálculo de $[x_i, \Pi_j]$,

$$[x_i, \Pi_j] = [x_i, p_j - eA_j(x, y, z)] = [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$$

se obtienen las relaciones de conmutación canónicas.

(b) Cálculo de $[\Pi_i, \Pi_j]$,

$$\begin{aligned}
[\Pi_i, \Pi_j] &= [p_i - eA_i(x, y, z), p_j - eA_j(x, y, z)] \\
&= -e\left([p_i, A_j(x, y, z)] + [p_j, A_i(x, y, z)]\right) \\
&= -e\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}[p_i, x_i] + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}[x_j, p_j]\right)
\end{aligned}$$

por lo que

$$[\Pi_i, \Pi_j] = ie\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) = ie\hbar\epsilon_{ijk}B_k$$

si $i = j$ da cero, el caso no nulo es si $i \neq j \neq k$, donde:

$$B_k = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

con $\{i, j, k\}$ una permutación cíclica de $\{1, 2, 3\}$. Siempre podemos elegir una dirección de $\boldsymbol{B}$, por ejemplo la dirección z, por lo que en las dos direcciones ortogonales a esta, tendremos $[\Pi_x, \Pi_y] = i\frac{e\hbar}{c}B$. Es decir que, a menos de una constante, son canónicamente conjugadas. Redefiniendo y usando que $e = -|e|$

$$\tilde{\Pi}_x = \frac{\Pi_x}{\sqrt{|e|B}} \qquad \tilde{\Pi}_y = \frac{\Pi_y}{\sqrt{|e|B}} \qquad \Longrightarrow \qquad [\tilde{\Pi}_y, \tilde{\Pi}_x] = i\hbar$$

por lo que $\left\{\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y\right\}$ son canónicamente conjugadas. El Hamiltoniano del sistema se escribe

$$H = \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{H_{z,libre}} + \underbrace{\frac{|e|B}{2m}(\tilde{\Pi}_y^2 + \tilde{\Pi}_x^2)}_{H_{oscilador}}$$

donde la masa del oscilador es: $\tilde{m} = \frac{m}{eB}$ y $\tilde{m}\omega^2 = \frac{1}{\tilde{m}}$ de donde:

$$\omega = \frac{|e|B}{m}$$

los autovalores son:

$$E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

Hasta ahora la cuenta es independiente de la medida (gauge). Para proseguir debemos elegir un gauge particular, en este caso se sugiere el gauge simétrico, donde $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$. Dada la elección del par momento - coordenada realizada, en el Hamiltoniano no aparece un grado de libertad. Por ello deberemos plantear un par de variables conjugadas que satisfaga relaciones de conmutación canónica con $\left\{\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y\right\}$. Este problema es un ejercicio de Mecánica Clásica (transformaciones canónicas), y se elige el par: $X = p_x + eA_x$, $Y = p_y + eA_y$

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= [p_x + eA_x, p_y + eA_y] \\
&= \frac{eB}{2}([-y, p_y] + [p_x, x]) \\
&= |e|Bi\hbar
\end{aligned}$$

de donde podemos definir dos variables canónicamente conjugadas:

$$\tilde{X} = \frac{X}{\sqrt{|e|B}} \qquad \tilde{Y} = \frac{Y}{\sqrt{|e|B}} \qquad [\tilde{X}, \tilde{Y}] = i\hbar$$

Ahora nos falta ver los conmutadores con las otras variables, en particular con $\tilde{\Pi}_x$ y $\tilde{\Pi}_y$. No es dificil verificar que los conmutadores son nulos por lo cual estas nuevas magnitudes conmutan con H. Esto es importante para poder etiquetar los estados de H en forma completa (en Mecánica Clásica equivale a reintroducir el grado de libertad ausente en H).

Definamos ahora nuevos operadores de subida y bajada, tales que $[a, a^\dagger] = 1$ y $[b, b^\dagger] = 1$:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{\Pi}_x + i\tilde{\Pi}_y) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{\Pi}_x - i\tilde{\Pi}_y) \qquad [a, a^\dagger] = 1$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{X} + i\tilde{Y}) \qquad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\tilde{X} - i\tilde{Y}) \qquad [b, b^\dagger] = 1$$

Estos operadores nos permiten definir una base de autoestados del Hamiltoniano. Sea el estado $|k_z, 0, 0\rangle$ que es anulado por a y por b. A partir de allí podemos generar otros autoestados de H (notar que H conmuta con b y $b^\dagger$):

$$H\,|k_z, n, m\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|k_z, n, m\rangle \qquad |k_z, n, m\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\frac{b^{\dagger m}}{\sqrt{m!}}\,|k_z, 0, 0\rangle$$

Donde se evidencia la gran degeneración de los niveles de Landau, cuyas energías sólo dependen de n y no de m. Para terminar daremos la expresión de la función de onda del estado $|k_z, 0, 0\rangle$,

$$\langle x, y, z|k_z, 0, 0\rangle \sim e^{ik_z z}e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \qquad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{|e|B}}$$

donde l_B es denominada longitud magnética.

Se sugiere a les alumnes calcular el estado $|k_z, 1, 0\rangle$

3. Problema 12

Estados de n fotones y estados coherentes del campo EM. Considere un único modo del campo electromagnético.

(a) Sea $|n\rangle$ el estado con n fotones en este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle n|E|n\rangle\,(t)$ del campo eléctrico en este estado. ¿Obtiene lo que hubiese esperado? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete.

(b) Sea $|\alpha\rangle$ un estado coherente de este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle\alpha|E|\alpha\rangle\,(t)$ del campo en este estado, escribiendo explícitamente $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$. Interprete el resultado. ¿Qué es un estado coherente del campo? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete. Finalmente, calcule la probabilidad de obtener n fotones en un estado coherente, ¿qué distribución obtiene?

El potencial vector cuantizado de un campo monomodo en un volumen V está dado por:

$$\boldsymbol{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a^\dagger)$$

usando que en el gauge de radiación: $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ obtenemos

$$\boldsymbol{E}(\vec{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a^\dagger)$$

(a) Cálculo del valor medio del campo $\boldsymbol{E}$ entre estados de número de fotones $|n\rangle$ es inmediato usando que $\langle n|\,a\,|n\rangle = \langle n|\,a^\dagger\,|n\rangle = 0$

$$\langle n|\,\boldsymbol{E}(\vec{r}, t)\,|n\rangle = 0$$

para la varianza necesitamos el valor medio del cuadrado del campo

$$\langle n| \boldsymbol{E}^2(\vec{r},t) |n\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \langle n| (e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a^2 + e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a^{\dagger 2} - \underbrace{aa^\dagger}_{a^\dagger a+[a,a^\dagger]} - a^\dagger a) = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(2n+1)$$

por lo que

$$Var(\boldsymbol{E}(\vec{r},t))_{|n\rangle} = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(2n+1)$$

Si bien el valor medio del campo es nulo, existen fluctuaciones incluso en el vacío $|0\rangle$ (0 fotones). Estas fluctuaciones dan lugar a fenómenos observables por ejemplo la fuerza de Casimir y el corrimiento de Lamb en la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno.

(b) Cálculo del valor medio del campo $\boldsymbol{E}$ entre estados coherentes $|\alpha\rangle$. El complejo $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, por lo que:

$$\langle\alpha| \boldsymbol{E}(\vec{r},t) |\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}|\alpha|e^{i\varphi} - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}|\alpha|e^{-i\varphi})$$

de donde

$$\langle\alpha| \boldsymbol{E}(\vec{r},t) |\alpha\rangle = -2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x|\alpha| \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi\right)$$

por lo que el valor medio del campo entre estados coherentes sigue un comportamiento clásico, pues son ondas viajeras de amplitud proporcional a $|\alpha|$.

El cálculo de la varianza se deja como ejercicio a les alumnes.