Física Teórica 2 - Guía 7: Momento angular y rotaciones

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

26 de mayo de 2022

1. Breve resumen: Operador de rotaciones

En Mecánica Cuántica, al igual que en Mecánica Clásica, el generador de rotaciones es el momento angular. Una rotación en el espacio de Hilbert está dada por el operador de rotaciones (unitario):

$$\mathcal{D}\left(R\right) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}\varphi}{\hbar}\right)$$

su acción sobre un estado $|\psi\rangle$:

$$|\psi'\rangle = \mathcal{D}\left(R\right)|\psi\rangle$$

debe rotar con $R = R(\hat{n},\phi)$ (alrededor del eje $\hat{n}$ en un ángulo ϕ) las componentes de los valores medios de un operador vectorial $\boldsymbol{V}$ (esto puede ser considerado una definición de operador vectorial):

$$\langle\psi'|V_i|\psi'\rangle = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\phi)\,\langle\psi'|V_j|\psi'\rangle$$

lo que lleva inmediatamente a la relación entre operadores:

$$\mathcal{D}^\dagger\left(R\right)V_i\,\mathcal{D}\left(R\right) = \sum_j R_{ij}(\hat{n},\phi)V_j,$$

equivalentemente las tres componentes del operador vectorial deben satisfacer:

$$[J_j, V_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}V_l.$$

Claramente $\boldsymbol{J}$ es un operador vectorial pues satisface estas relaciones de conmutación, al igual que la posición $\boldsymbol{r}$ y el momento $\boldsymbol{p}$.

El producto escalar de dos operadores vectoriales es un escalar ante rotaciones:

$$\boldsymbol{V}'\cdot\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}$$

donde se usa $\boldsymbol{V}' = \mathcal{D}^\dagger(R)\,\boldsymbol{V}\,\mathcal{D}(R) = R\,\boldsymbol{V}$ (lo mismo para $\boldsymbol{W}'$) y la ortogonalidad de la matriz de rotaciones: $R \cdot R^t = \mathbb{I}$.

Del mismo modo se deduce una identidad similar para el producto escalar de un vector 3D $\boldsymbol{a}$ por un operador vectorial $\boldsymbol{V}$, por ejemplo:

$$R\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \underbrace{R^t R}_{\mathbb{I}}\boldsymbol{a} \cdot R^t\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot R^t\boldsymbol{V} = \boldsymbol{a} \cdot \mathcal{D}(R)\,\boldsymbol{V}\,\mathcal{D}^\dagger(R) = \mathcal{D}(R)\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V})\,\mathcal{D}^\dagger(R)$$

donde se sacó afuera los operadores de rotación que actúan en el espacio de Hilbert. Ahora demostraremos que conocidos los autoestados del operador $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}\,|v_a\rangle = v_a\,|v_a\rangle$$

podemos encontrar el autoestado del operador $R\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$ con autovalor v_a rotando el correspondiente autoestado de $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}\,|v_a\rangle &= v_a\,|v_a\rangle \\
\mathcal{D}(R)\,(\boldsymbol{a} \cdot V)\,\underbrace{\mathcal{D}^\dagger(R)\,\mathcal{D}(R)}_{\mathbb{I}}\,|v\rangle_a &= \mathcal{D}(R)\,v_a\,|v_a\rangle \\
R\boldsymbol{a} \cdot V\,\mathcal{D}(R)\,|v_a\rangle &= v_a\,\mathcal{D}(R)\,|v_a\rangle
\end{aligned}$$

Finalmente recordemos que los autoestados comunes de J^2 y J_z son:

$$\begin{aligned}
J^2\,|j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|j,m\rangle \\
J_z\,|j,m\rangle &= \hbar j, m
\end{aligned}$$

obtenidos usando los operadores de subida y bajada:

$$J_\pm\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\hbar\,|j,m\rangle \qquad \text{con} \qquad J_\pm = J_x \pm iJ_y$$

Para obtener las matrices de momento angular es útil calcular la matriz de J_+, luego la de $J_- = J_+^\dagger$ y finalmente $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$ y $J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$.

2. Problema 1

Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R)\,V_i\,\mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij}V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{D}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert.

(a) Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}}, \varphi)\,|\psi\rangle = \exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)|\psi\rangle\,.$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|V_x|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|V_y|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|V_z|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|V_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|V_y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|V_z|\psi\rangle$ en el sistema original. Concluya que se cumple la definición de operador vectorial para $\boldsymbol{V}$. Use que las tres componentes del operador vectorial satisfacen:

$$[J_j, V_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}V_l.$$

(b) Verifique que el operador de momento angular $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ es un operador vectorial.

Buscamos demostrar la fórmula de rotación para el caso particular de una rotación alrededor del eje z en ángulo finito ϕ.

(a) Por lo visto en la introducción basta averiguar que:

(I) Componente z: La componente V_z no cambia en esta rotación pues J_z conmuta con V_z:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_z\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right) = V_z$$

(II) Componente x: La componente x cambia en esta rotación. Usaremos el resultado del P11 de la Guía 2: $e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$, y los conmutadores: $[J_z, V_x] = i\hbar V_y$ y $[J_z, V_y] = -i\hbar V_x$

$$\begin{aligned}\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_x\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right) &= V_x + (\frac{i\phi}{\hbar})[J_z, V_x] + (\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{2!}[J_z,[J_z,V_x]]+\\ &(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{3!}[J_z,[J_z,[J_z,V_x]]] + ...\\ &= V_x + (\frac{i\phi}{\hbar})(i\hbar V_y) + (\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{2!}[J_z,[J_z,V_x]]+\\ &(\frac{i\phi}{\hbar})^2\frac{1}{3!}[J_z,[J_z,[J_z,V_x]]] + ...\end{aligned}$$

todos los conmutadores alternan entre $\pm V_{\{x,y\}}$, por lo que la dependencia operatorial se factoriza obteniendo finalmente:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_x\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right) = \cos\phi V_x - \sin\phi V_y$$

(III) Del mismo modo se obtiene para la componente V_y:

$$\exp\left(i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)V_y\exp\left(-i\,\frac{J_z\varphi}{\hbar}\right)=\sin\phi V_x+\cos\phi V_y$$

Por consiguiente los valores medios transforman ante rotaciones como las componentes del vector de valores medios.

(b) Si $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}$ se cumple igualmente pues son válidas las reglas de conmutación requeridas.

3. Problema 3

Considere un sistema de spin 1/2 (es decir $j=1/2$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores S^2, S_x, S_y y S_z en la base de autoestados de S_z. Muestre que se obtiene que los operadores de spin están dados por $S_i=\frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli.

(b) Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

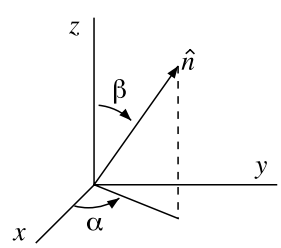
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)=\exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right)=\mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)-i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

(c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}},\phi)$ en la base

$$\left\{|+\rangle\equiv\left|j=\frac{1}{2},m=\frac{1}{2}\right\rangle,|-\rangle\equiv\left|j=\frac{1}{2},m=-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}.$$

(d) Sea $\hat{\boldsymbol{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado† para obtener el estado $|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}},+\rangle$, que representa un spin orientado según $\hat{\boldsymbol{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



† Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

(e) Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},2\pi)]{} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, 2\pi)\,|\psi\rangle = -\,|\psi\rangle\,.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

(a) está en el apunte y se hizo en clase.
(b) Considerando que el momento angular en un sistema de spin 1/2 es $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$,

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{2}\right) = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde la última igualdad sale de expandir la exponencial y usar que todas las potencias pares $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})^{2k} = \mathbb{I}$ y todas las potencias impares: $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})^{2k+1} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}$ ($k > 0$ entero). Es conveniente obtener esta matriz explícitamente en la base de autoestados de S_z. Dado que las únicas matrices que contribuyen a la diagonal son $\mathbb{I}$ y σ_z, y que sólo contribuyen a los elementos no diagonales σ_x y σ_y, recordando las matrices de Pauli tenemos:

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} & -i(n_x - in_y)\sin\frac{\phi}{2} \\ -i(n_x + in_y)\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}.$$

(d) Usaremos la propiedad por la cual los autoestados de una dada proyección de un operador vectorial $\boldsymbol{V}$: $|\hat{n}\cdot\boldsymbol{V} = v\rangle$, se pueden obtener por rotación del autoestado $|\hat{n}'\cdot\boldsymbol{V} = v\rangle$, siendo R la rotación que lleva de $\hat{n}'$ a $\hat{n}$: $\hat{n} = R\hat{n}'$:

$$|\hat{n}\cdot\boldsymbol{V} = v_n\rangle = \mathcal{D}(R)\,|\hat{n}'\cdot\boldsymbol{V} = v_{n'}\rangle \qquad \text{con} \qquad \hat{n} = R\hat{n}'$$

tal como se demostró en la introducción.

Las dos formas posibles son:
(i) Con una sola rotación del versor $\hat{z}$ hacia $\hat{n}$: rotación en ángulo β alrededor del eje (perpendicular a $\hat{z}$ y $\hat{n}$): $\hat{n}_R = (\cos(\alpha + \pi/2), \sin(\alpha + \pi/2), 0) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0))$:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}\rangle &= e^{-i\hat{n}_R\cdot\boldsymbol{\sigma}\frac{\beta}{2}}\,|+\rangle \\ &= \cos\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \sin\frac{\beta}{2}^{\,i\alpha}\,|-\rangle \end{aligned}$$

un resultado que ya conocemos.

4. Problema 4

Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\alpha)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

(a) Recordando que $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, y usando la relación conocida

$$\exp(-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}\phi/2) = \cos(\phi/2)\mathbb{I} - i\sin(\phi/2)\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}$$

En la base de autoestados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de σ_z es una fase, solo necesitamos

$$\exp(-i\sigma_y\beta/2) = \cos(\beta/2)\mathbb{I} - i\sin(\beta/2)\sigma_y$$

Aplicando sobre los elementos de la base en el orden requerido:

(i)

$$\exp(-i\sigma_z\gamma/2)\,|\pm\rangle = \exp(\mp i\gamma/2)\,|\pm\rangle$$

(ii)

$$\exp(-i\sigma_y\beta/2)\left(\exp(\mp i\gamma/2)\,|\pm\rangle\right) = \exp(\mp i\gamma/2)\left(\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle - i\sin(\beta/2)(\pm i)\,|\mp\rangle\right)$$

(iii)

$$\begin{aligned}\exp(-i\sigma_z\alpha/2)\left[\exp(\mp i\gamma/2)\left(\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle \pm \sin(\beta/2)\,|\mp\rangle\right)\right] &= \exp(\mp i\gamma/2)\exp(\mp i\alpha/2)\cos(\beta/2)\,|\pm\rangle\\ &\quad \pm \exp(\mp i\gamma/2)\exp(\pm i\alpha/2)\sin(\beta/2)\,|\mp\rangle\end{aligned}$$

De donde se obtienen las dos columnas de la matriz de rotaciones buscada:

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}.$$

(b) Usando el resultado (c) del P3 la matriz de rotaciones dados el eje $\hat{n}$ y el ángulo ϕ de rotación es:

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{n},\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} & -i(n_x - in_y)\sin\frac{\phi}{2}\\ -i(n_x + in_y)\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}.$$

comparando ambos resultados obtenemos:
(i) Igualando las trazas:

$$2\cos\frac{\phi}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

(ii) restando el primer elemento diagonal del segundo:

$$2in_z\sin\frac{\phi}{2} = 2i\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

(iii) sumando los elementos extra-diagonales:

$$-2in_x\sin\frac{\phi}{2} = 2i\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

(iv) restando los elementos extra-diagonales:

$$2n_y\sin\frac{\phi}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

Obteniéndose de estas ecuaciones el ángulo de rotación ϕ y las componentes del eje de rotación $\hat{n}$.