Física Teórica 2 - Teorema de Wigner-Eckart

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

6 de junio de 2022

1. Tensores irreducibles

Los operadores tensoriales irreducibles (también llamados esféricos) son un conjunto de operadores caracterizados por un mismo rango (k) y por $2k+1$ componentes $-k \leq q \leq k$: $T_q^{(k)}$, que ante rotaciones satisface la siguiente relación (usamos $R \to R^{-1}$ del apunte):

$$\mathcal{D}\left(R\right) T_q^{(k)}\ \mathcal{D}^{\dagger}\left(R\right) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}\left(R\right) T_{q'}^{(k)}, \tag{1}$$

donde $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R)$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k, es decir $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}(R) = \langle kq'|\mathcal{D}(R)|kq\rangle$. Usando rotaciones infinitesimales se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)}, \qquad \left[J_{\pm}, T_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, T_{q\pm 1}^{(k)}. \tag{2}$$

2. Teorema de Wigner-Eckart

Este teorema relaciona elementos de matriz de todas las componentes de un dado operador tensorial irreducible, entre estados con A, J^2 y J_z definidos (estos operadores forman un CCOC):

$$\langle \alpha', j', m'|\, T_q^{(k)}\, |\alpha, j, m\rangle = \langle jk; mq|j'm'\rangle \underbrace{T_{\alpha',\alpha}^{j',k,j}}_{\langle \alpha' j'||T^k||\alpha j\rangle} \tag{3}$$

El coeficiente del lado derecho, o el elemento de matriz con doble barra, denominado elemento de matriz reducido (a veces va con algún factor extra), no dependen de m, m', q. Toda la dependencia con estas proyecciones reside en el coeficiente de Clebsh-Gordon.

El interés del teorema de Wigner-Eckart proviene de al menos dos implicancias:

i) Dados α, α', j, j' y k, conociendo un sólo elemento de matriz no nulo que sirve para determinar el elemento de matriz reducido, se pueden encontrar todos los $(2j'+1)(2k+1)(2j+1)$ elementos de matriz usando la tabla de coeficientes de Clebsh-Gordon.

ii) Como que los coeficientes de Clebsh-Gordon pueden ser no nulos sólo si $m' = q + m$ y $|j-k| \leq j' \leq j+k$, esto nos da un conjunto de reglas de selección mínimas para que haya una transición mediada por la perturbación $T_q^{(k)}$ (que depende del elemento de matriz de la perturbación si esta se expresa como tensor irreducible). Por ejemplo:

• Escalar: $T_0^{(0)}$ (este operador conmuta con J^2 y J_z). Necesitamos que $m' = m$ y que $j' = j$ para tener un elemento de matriz posiblemente no nulo.

Una demostración parte de considerar que $T_q^{(k)}\,|\alpha jm\rangle$ posee propiedades de un estado producto de autoestados de momento angular ($\{k,q\}$ y $\{j,m\}$). Si esto fuera así, formamos un candidato a tener momento angular J^2 y J_z definidos con ayuda de los coeficientes de Clebsh-Gordon:

$$|\Psi_{JM}\rangle = \sum_{m,q} T_q^{(k)}\,|\alpha jm\rangle\,\langle jk, mq|JM\rangle \tag{4}$$

Asumiendo por ahora la validez de esto (se demostrará luego), expandimos este estado en una base completa autoestados de A, J^2 y J_z:

$$|\Psi_{JM}\rangle = \sum_{\alpha'} |\alpha' JM\rangle\, C_{\alpha'\alpha}^{jk,JM} \tag{5}$$

aplicando $J_\pm$ sobre esta igualdad

$$\cancel{\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\hbar}\,|\Psi_{J,M\pm1}\rangle = \sum_{\alpha'} \cancel{\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\hbar}\,|\alpha' J, M\pm1\rangle \times C_{\alpha'\alpha}^{jk,JM} \tag{6}$$

$$|\Psi_{JM\pm1}\rangle = \sum_{\alpha'} |\alpha' JM\pm1\rangle\, C_{\alpha'\alpha}^{jk,JM} \tag{7}$$

comparando (5) y (7) vemos que $C_{\alpha'\alpha}^{jk,J,M} = C_{\alpha'\alpha}^{jk,J,M\pm1}$, es decir estos coeficientes no dependen de M por lo que ahora los denotamos $T_{\alpha'\alpha}^{jk,J}$. Podemos despejar de la relación (5) (multiplicamos por $\langle JM|jk,mq\rangle$ y sumando sobre J, M):

$$\begin{aligned} T_q^{(k)}\,|\alpha jm\rangle &= \sum_{JM} |\Psi_{JM}\rangle\,\langle JM|jk;mq\rangle \\ &= \sum_{JM\alpha''} |\alpha'' JM\rangle\, T_{\alpha''\alpha}^{jk,J}\,\langle JM|jk;mq\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

proyectando (8) sobre $\langle \alpha' j' m'|$ obtenemos el Teorema de Wigner-Eckart:

$$\boxed{\langle \alpha', j', m'|\, T_q^{(k)}\,|\alpha, j, m\rangle = \langle jk; mq|j'm'\rangle\, T_{\alpha',\alpha}^{j',k,j}} \tag{9}$$

Finalmente, la prueba que $|\Psi_{JM}\rangle$ es autoestado de J^2 y J_z se puede hacer si probamos que:

$$J_z |\Psi_{JM}\rangle = \hbar M |\Psi_{JM}\rangle \tag{10}$$
$$J_\pm |\Psi_{JM}\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M\pm 1)}\, |\Psi_{JM}\rangle \tag{11}$$

La demostración de (10) es directa operando sobre (5) con J_z:

$$\begin{aligned}
J_z |\Psi_{JM}\rangle &= \sum_{m,q} \underbrace{J_z T_q^{(k)}}_{T_q^{(k)} J_z + \left[J_z, T_q^{(k)}\right]} |\alpha jm\rangle \langle jk, mq|JM\rangle \\
&= \sum_{m,q} \left(\hbar m T_q^{(k)} + \hbar q T_q^{(k)}\right) |\alpha jm\rangle \langle jk, mq|JM\rangle \\
&= \hbar \overbrace{M}^{m+q} |\Psi_{JM}\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

del mismo modo para la demostración de (11), operando sobre (5) con $J_\pm$:

$$\begin{aligned}
J_{\pm 1} |\Psi_{JM}\rangle &= \sum_{m,q} \underbrace{J_{\pm 1} T_q^{(k)}}_{T_q^{(k)} J_{\pm 1} + \left[J_{\pm 1}, T_q^{(k)}\right]} |\alpha jm\rangle \langle jk, mq|JM\rangle \\
&= \sum_{m,q} \left(\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} T_q^{(k)} + \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)} T_q^{(k)}\right) \\
&\quad |\alpha jm \pm 1\rangle \langle jk, mq|JM\rangle \\
&= \sum_{m,q} (\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\mp 1)}\, \langle jk, m\mp 1 q|JM\rangle + \\
&\quad \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\mp 1)}\, \langle jk, mq \pm 1|JM\rangle) T_q^{(k)} \qquad (13) \\
&= \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\mp 1)}\, \langle jk, mq\pm 1|JM\pm 1\rangle)\, |\Psi_{JM}\rangle \qquad (14)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad surge de la relación de recurrencia de los coeficientes de Clebsh-Gordon.