Generación de estados coherentes en una cavidad. Considere una cavidad mono-modo de frecuencia ω_c que se encuentra inicialmente en el estado del vacío $|0\rangle$ (es decir sin fotones). La cavidad se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas (clásicas) que oscilan con una frecuencia ω_p. El acoplamiento entre la fuente y la cavidad,

$$H_p = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J}(t) = 2\hbar\Omega(a + a^\dagger)\cos\omega_p t,$$

puede aproximarse bajo la aproximación de onda rotante (es decir sin términos de alta frecuencia) por

$$H_p \approx \hbar\Omega(ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}).$$

(a) Encuentre cuál es el estado cuántico del campo dentro de la cavidad después de un tiempo t. Para ello, resuelva la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción a, considerando primero el caso $\omega_c \neq \omega_p$. Muestre de esta forma que el estado a tiempo t es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. ¿Cuál es el $\alpha(t)$ correspondiente? Para el caso resonante, $\omega_c = \omega_p$, tome el límite en el estado obtenido antes ¿Qué obtiene?¿Cómo es la intensidad del campo a tiempos largos? Interprete.

Ayuda: la solución de $f'(t) = -i\omega f(t) - i\Omega e^{-i\omega' t}$ es $f(t) = ce^{-i\omega t} + \frac{\Omega}{\omega' - \omega}e^{-i\omega' t}$, con c una constante de integración.

(b) Calcule el valor medio de fotones en la cavidad y la probabilidad de tener cero fotones en función del tiempo. En particular, analice los valores que toman estas expresiones en el caso resonante e interprete.

(c) Finalmente, suponga que el estado inicial de la cavidad es un estado coherente $|\alpha_0\rangle$ y se acopla con el campo clásico tal como antes. Muestre entonces que el estado de la cavidad a todo tiempo es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$ y encuentre el valor de $|\alpha(t)\rangle$.

Solución:
Consideremos una cavidad con un único modo de frecuencia ω_c y cuyo Hamiltoniano es

$$H_c = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{0.0.1}$$

Esta cavidad se acompla con una fuentes de ondas electromagnéticas clásicas que oscilan con una frecuencia ω_p. La interacción entre el campo dentro de la cavidad y las ondas externas está descripta por el siguiente Hamiltoniano $H_p(t) = \hbar\Omega\left(a + a^\dagger\right)\cos\omega_p t$. A esta interacción se le puede aplicar la aproximación de onda rotante, la que ignora términos de alta frecuencia, y obtener

$$H_p(t) \approx \hbar\Omega\left(ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}\right) \tag{0.0.2}$$

Finalmente, el Hamiltoniano total de este sistema es $H(t) = H_c + H_p(t)$. Queremos ver entonces cómo evoluciona el sistema si inicialmente se encontraba en el estado $|\psi_0\rangle = |0\rangle$, es decir que la cavidad no tenía fotones. Recordemos que en la representación de Schrodinger el estado evoluciona en el tiempo; mientras que en la representación de Heisenberg lo hacen los operadores. Vamos a usar estas dos ideas, de manera adecuada, para resolver este problema.

En la representación de Schrodinger, el estado evolucionado a tiempo t es $|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle$; donde $U(t)$ satisface

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = H(t)U(t). \tag{0.0.3}$$

Por otro lado, en la representación de Heisenberg el operador de destrucción a tiempo t es

$$a(t) = U^\dagger(t)aU(t). \tag{0.0.4}$$

Es sencillo derivar esta expresión y, utilizando (0.0.3), obtener la siguiente ecuación diferencial para $a(t)$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = U^\dagger(t)aH(t)U(t) - U^\dagger(t)H(t)aU(t).$$

Desarrollando,

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} &= U^\dagger(t)\left[a, H(t)\right]U(t) \\
&= U^\dagger(t)\left\{\hbar\omega_c\left[a, a^\dagger a + \frac{1}{2}\right] + \hbar\Omega\left[a, ae^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t}\right]\right\}U(t) \\
&= U^\dagger(t)\left\{\hbar\omega_c a + \hbar\Omega e^{-i\omega_p t}\right\}U(t) \\
\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} &= -i\omega_c a(t) - i\Omega e^{-i\omega_p t}.
\end{aligned}
\tag{0.0.5}
$$

Usando la ayuda del ejercicio sabemos que la solución es de la forma $a(t) = Ae^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}e^{-i\omega_p t}$ donde A es un operador independiente del tiempo ha determinar. Finalizamos pidiendo que $a(0) = a$, obteniendo

$$
a(t) = ae^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right). \tag{0.0.6}
$$

Veamos que $|\psi(t)\rangle$ es un estado coherente, es decir que $a|\psi(t)\rangle = \lambda(t)|\psi(t)\rangle$.

$$
\begin{aligned}
a|\psi(t)\rangle &= aU(t)|0\rangle \\
&= U(t)U^\dagger(t)a(t)|0\rangle \quad \text{donde} \quad U(t)U^\dagger(t) = \mathbb{I} \\
&= U(t)a(t)|0\rangle \\
&= U(t)\left\{ae^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\}|0\rangle \\
&= U(t)\left\{0 + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)|0\rangle\right\} \\
&= \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)U(t)|0\rangle \\
a|\psi(t)\rangle &= \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)|\psi(t)\rangle.
\end{aligned}
\tag{0.0.7}
$$

De manera que $|\psi(t)\rangle$ es paralelo al estado coherente $\left|\frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\rangle$. Y dado que ambos tiene norma 1 estos dos estados solo difieren en una fase global la cual podemos ignorar. Finalmente el estado $|0\rangle$, a tiempo t, evoluciona al estado coherente

$$
|\psi(t)\rangle = U(t)|0\rangle = \left|\frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\rangle. \tag{0.0.8}
$$

Tomando $\omega_p = \omega_0 + \Delta$ y $\omega_c = \omega_0 - \Delta$ podemos reescribir este estado como

$$
|\psi(t)\rangle = \left|\frac{-i\Omega\sin\Delta t}{\Delta}e^{-i\omega_0 t}\right\rangle. \tag{0.0.9}
$$

Con esta reescritura de $|\psi(t)\rangle$ es sencillo calcular el valor medio de fotones dentro de la cavidad. Recordemos que $\langle N\rangle = |\lambda|^2$ para todo estado coherente $|\lambda\rangle$. Entonces

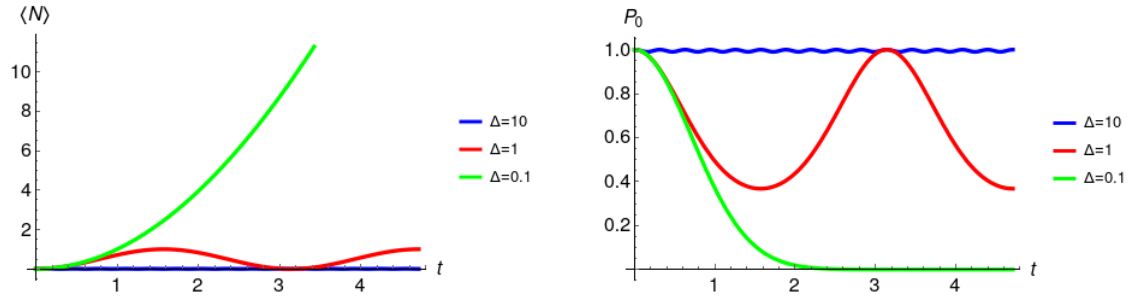
$$
\langle N\rangle(t) = \frac{\Omega^2}{\Delta^2}\sin^2\Delta t \tag{0.0.10}
$$

Y la probabilidad de medir 0 fotones es $P_0(t) = |\langle 0|\lambda\rangle|^2 = \left|e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}\sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\delta_{n,0}\right|^2 = e^{-|\lambda|^2}$. Entonces

$$
P_0(t) = e^{-\frac{\Omega^2}{\Delta^2}\sin^2\Delta t}. \tag{0.0.11}
$$

En los gráficos de la figura 1 mostramos estas cantidades para $\Delta = 10$, $\Delta = 1$ y $\Delta = 0.1$ tomando $\Omega = 1$.

Vemos que a medida que $\Delta \to 0$, es decir que nos acercamos al regimen de resonancia, $\langle N\rangle$ parece crecer cuadráticamente. Este fenómeno lo podemos ver a partir de (0.0.10). Recordando que $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ si $0 < x \ll 1$, es



(a) $\langle N\rangle(t)$ dentro de la cavidad para distintos valores de Δ.

(b) $P_0(t)$ para distintos valores de Δ.

Figura 1: Evolución temporal del valor medio de fotones y la probabilidad de medir 0 fotones dentro de la cavidad. Para todos los casos se tomó $\Omega = 1$. Además se consideró el tiempo t (resp. las frecuencias Δ y Ω) proporcionales (resp. inversamente proporcionales) a alguna escala de tiempo, digase τ; con lo cual, los parámetros mostrados en estos gráficos, t, Ω y Δ, son adimensionales

$$\langle N\rangle(t) \approx \Omega^2 t^2. \tag{0.0.12}$$

Es decir que en para un intervalo de tiempo tal que $\Delta t \ll 1$, la intensidad del campo dentro de la cavidad crece cuadraticamente. Equivalentemente, dado que $\left|\vec{E}\right| \sim |\alpha|$ para un estado coherente $|\alpha\rangle$, podemos decir que la intensidad del campo eléctrico crece lineamente en el tiempo.

Para finalizar veamos que se puede generalizar el resultado (0.0.8) para cualquier estado inicial coherente. Si $|\psi_0\rangle = |\lambda\rangle$ es un estado coherente entonces

$$\begin{aligned} a\,|\psi(t)\rangle &= U(t)a(t)\,|\lambda\rangle \\ &= U(t)\left\{ae^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\}|\lambda\rangle \\ a\,|\psi(t)\rangle &= \left\{\lambda e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\}|\psi(t)\rangle \end{aligned} \tag{0.0.13}$$

De manera que $|\lambda\rangle$ evoluciona al estado coherente $\left|\lambda e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t}\right)\right\rangle$. Es decir que este acomplamiento entre la fuenta y la cavidad permite llevar el estado de 0 fotones a cualquier estado coherente mediante sucesivos ajustes de Ω; ya sea por cambio de intensidad (cambiar $|\Omega|$) o por cambio de polarización (cambiar Ω por $-\Omega$).