# P1) Estados Squeezed del oscilador armónico:

Considere una partícula en un potencial armónico 1-D. de frec $\omega$. Se define el operador de squeezing $\hat{S}(r)$ como:

$$\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})}$$

donde $r \in \mathbb{R}$, y $\hat{a}$ y $\hat{a}^+$ son los op. de usuales de aniq y creación.

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{1}{m\omega}\hat{p}\right) \qquad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{1}{m\omega}\hat{p}\right)$$

con $\hat{x}$ y $\hat{p}$ los op. de posición y momento.

a.- Verifique que $\hat{S}(r)$ es unitario y que $\hat{S}^{-1}(r) = \hat{S}(-r)$

**Sol:** q.v.q. $\hat{S}^+(r)\hat{S}(r) = \hat{S}(r)\hat{S}^+(r) = \hat{\mathbb{I}}$.

$$\hat{S}^+(r) = \left[e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})}\right]^+ = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})^+} = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2)}$$

C. Aux:

$$f^+(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n (\hat{A}^n)^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n (\hat{A}^+)^n = f(\hat{A}^+)$$

real

$$\Rightarrow \hat{S}^+(r)\cdot\hat{S}(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2)}\,\hat{\mathbb{I}}\,e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{2+})}$$

y quiero usar que $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = e^{c}\hat{B}$ con $[\hat{A},\hat{B}] = c\hat{B}$

$$\hat{A} = \frac{r}{2}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2), \quad \hat{B} = \hat{\mathbb{I}}, \quad [\hat{A},\hat{B}] = 0. \ (c=0).$$

$$\Rightarrow \hat{S}^+(r)\hat{S}(r) = \hat{\mathbb{I}} = \hat{S}(r)\hat{S}^+(r) \Rightarrow \boxed{\hat{S}(r) \text{ unitario.}}$$

$$\boxed{\hat{S}^{-1}(r)} = \hat{S}^+(r) = e^{\frac{r}{2}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2)} = e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})} = \boxed{\hat{S}(-r)}$$

b.- Muestre que el operador de posición transformado por la transf. de squeezing es:

$$\hat{S}^+(r)\,\hat{x}\,\hat{S}(r) = e^{-r}\hat{x}$$

Análogamente se puede mostrar que para el momento vale: $\hat{S}^+(r)\,\hat{p}\,\hat{S}(r) = e^{r}\hat{p}$

En base a como transforma los operadores de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ ¿cómo puede interpretar la acción de la transf. de squeezing $\hat{S}(r)$?

**Sol:** quiero reutilizar la formula del pto a.- $e^{A}Be^{-A} = e^{c}\hat{B}$ con $\hat{A} = -\frac{r}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2})$, $\hat{B} = \hat{x}$.

para ello calculo $[\hat{A},\hat{B}] = \left(\frac{r}{2}\right)\left[(\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2}); \hat{x}\right] =$

$$\hat{a}^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[\hat{x}^2 - \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} + \frac{i}{m\omega}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right]$$

$$\hat{a}^{+2} = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[\hat{x} - \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} - i\frac{1}{m\omega}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right]$$

$$\hat{a}^2 - \hat{a}^{+2} = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{2i}{m\omega}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\right) = \frac{i}{\hbar}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}).$$

$$\Rightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \left(\frac{-r}{2}\right)\frac{i}{\hbar}\left[\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}\,;\,\hat{x}\right] = \left(\frac{-ir}{2\hbar}\right)\left\{[\hat{x}\hat{p};\hat{x}] + [\hat{p}\hat{x};\hat{x}]\right\} =$$

$$= \left(\frac{-ir}{2\hbar}\right)\left\{\hat{x}[\hat{p},\hat{x}] + 0 + \hat{p}\cdot 0 + [\hat{p},\hat{x}]\hat{x}\right\} = \left(\frac{-ir}{\cancel{2\hbar}}\right)\cancel{i\hbar}\,\cancel{2}\,\hat{x} = -r\hat{x}$$

Por lo tanto $[\hat{A},\hat{B}] = \underbrace{(-r)}_{c}\cdot\hat{B} \Rightarrow e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = e^{c}\hat{B} \Rightarrow \boxed{\hat{S}^{+}(r)\,\hat{x}\,\hat{S}(r) = e^{-r}\hat{x}.}$

¿Qué hace la transf $\hat{S}(r)$ al operador $\hat{x}$?

Sea $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ que sucede con el autoestado transformado $\hat{S}(r)|x\rangle$.

$$\hat{x}\,\hat{S}(r)|x\rangle = \underbrace{\hat{S}(r)\,\hat{S}^{+}(r)}_{\mathbb{1}}\,\underbrace{\hat{x}\,\hat{S}(r)}_{e^{-r}\hat{x}}|x\rangle = \hat{S}(r)\,e^{-r}\hat{x}|x\rangle = e^{-r}\hat{S}(r)\,x|x\rangle = (xe^{-r})\,\hat{S}(r)|x\rangle$$

entonces $\hat{S}(r)|x\rangle$ es tmb. autovector del operador $\hat{x}$ con autovalor $e^{-r}x$

luego la transf. $\hat{S}(r)$ escala a los autovalores de $\hat{x} \to e^{-r}$ y de $\hat{p} \to e^{r}$

c.- Dado $r \in \mathbb{R}$ definimos los operadores $\begin{cases}\hat{Q}_r := e^{r}\hat{x}\\ \hat{P}_r := e^{-r}\hat{p}\end{cases}$ ; $\hat{a}_r = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}e^{r} + i\frac{e^{-r}}{m\omega}\hat{p}\right)$

Calcule $[\hat{Q}_r,\hat{P}_r]$ y $[\hat{a}_r,\hat{a}_r^{+}]$

¿qué reglas de conmutación satisfacen estos operadores? Interprete.

¿Cómo se relacionan estos operadores con las transf. de squeezing?

**Sol**

$$\boxed{[\hat{Q}_r,\hat{P}_r]} = [e^{r}\hat{x}, e^{-r}\hat{p}] = e^{r}e^{-r}[\hat{x},\hat{p}] = \boxed{i\hbar\,\hat{\mathbb{1}}}.$$ lo mismo regla de conmut. de $[\hat{x},\hat{p}]$.

$$\boxed{[\hat{a}_r;\hat{a}_r^{+}]} = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}e^{r} + i\hat{p}\frac{e^{-r}}{m\omega}\right);\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}e^{r} - i\hat{p}\frac{e^{-r}}{m\omega}\right)\right] =$$

distribuyo el conmutador y uso $[\hat{x},\hat{x}]=0$ $[\hat{p},\hat{p}]$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left([\hat{x}e^{r}; (-i)\hat{p}\frac{e^{-r}}{m\omega}] + [i\hat{p}\frac{e^{-r}}{m\omega}; \hat{x}e^{r}]\right) =$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left([\hat{x}; -i\frac{\hat{p}}{m\omega}] + [\frac{i\hat{p}}{m\omega}; \hat{x}]\right) = \frac{m\omega}{2\hbar}\left([\hat{x}; \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}] + [\frac{i\hat{p}}{m\omega}; \hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}]\right)$$

$$= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right); \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\right] = \boxed{[\hat{a},\hat{a}^{+}] = \hat{\mathbb{1}}}.$$

lo puedo agregar y no cambia el valor del conmutador.

d.- Dado un estado coherente del oscilador armónico $|\alpha\rangle$, definimos el estado coherente squeezed $|\alpha,r\rangle := \hat{S}(r)|\alpha\rangle$. Muestre que $|\alpha,r\rangle$ es autoestado del operador $\hat{a}_r$ ¿Cual es el autovalor corresp.? Interprete.

**Sol**: Tenemos que $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. quiero ver que:

$$\hat{a}_r|\alpha,r\rangle = \alpha_r|\alpha,r\rangle$$

$$\hat{a}_r \hat{S}(r)|\alpha\rangle = \hat{S}(r)\hat{S}^+(r)\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}e^r + i e^{-r}\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\hat{S}(r)|\alpha\rangle =$$

$$= \hat{S}(r)\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(e^r \underbrace{\hat{S}^+(r)\hat{x}\,\hat{S}(r)}_{e^{-r}\hat{x}} + \frac{i}{m\omega} e^{-r}\underbrace{\hat{S}^+(r)\hat{p}\,\hat{S}(r)}_{e^r\hat{p}}\right)\right\}|\alpha\rangle =$$

$$= \hat{S}(r)\left\{\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)\right\}|\alpha\rangle = \hat{S}(r)\,\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha\,\hat{S}(r)|\alpha\rangle$$

$\Rightarrow$ $|\alpha, r\rangle$ es autoestado de $\hat{a}_r$ con autovalor $\alpha$

e.- Calcule el valor medio y varianza de la posición $\hat{x}$ y del momento $\hat{p}$ en el estado coherente squeezed $|\alpha, r\rangle$ ¿cuánto vale el producto de varianzas? ¿Qué nos dice esto sobre la función de onda de los estados? ¿cómo puedo interpretar (cualit) el estado $|\alpha, r\rangle$?

**Sol:**

$$\langle x\rangle_{\alpha,r} = \langle\alpha|S^+(r)\,\hat{x}\,\hat{S}(r)|\alpha\rangle = e^{-r}\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = e^{-r}\langle\alpha|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^+)|\alpha\rangle = e^{-r}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*)$$

$$\langle p\rangle_{\alpha,r} = \langle\alpha|S^+(r)\,\hat{p}\,\hat{S}(r)|\alpha\rangle = e^{r}\langle\alpha|\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\frac{1}{i}(\hat{a}-\hat{a}^+)|\alpha\rangle = \frac{e^r}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\alpha-\alpha^*)$$

$$\langle x^2\rangle_{\alpha,r} = \langle\alpha|\hat{S}^+(r)\,\hat{x}\,\hat{S}(r)\hat{S}^+(r)\hat{x}\,\hat{S}(r)|\alpha\rangle = e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}+\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}}_{=2\hat{a}^+\hat{a}+\hat{\mathbb{I}}}|\alpha\rangle =$$

$$= e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2+1)$$

$$\langle p^2\rangle_{\alpha,r} = \langle\alpha|\hat{S}^+(r)\hat{p}\,\hat{S}(r)\hat{S}^+(r)\hat{p}\,\hat{S}(r)|\alpha\rangle = -e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}\langle\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}-2\hat{a}^+\hat{a}-\hat{\mathbb{I}}|\alpha\rangle =$$

$$= -e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2+\alpha^{*2}-2|\alpha|^2-1).$$

Entonces $Var(\hat{x}) = e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2+1) - e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2) =$

$$\boxed{Var(\hat{x}) = e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$Var(\hat{p}) = -e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2+\alpha^{*2}-2|\alpha|^2-1) + e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2) =$$

$$\boxed{Var(\hat{p}) = e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}}$$

Por lo tanto $\boxed{Var(\hat{x})\,Var(\hat{p}) = \cancel{e^{-2r}}\frac{\hbar}{2\cancel{m\omega}}\cancel{e^{2r}}\frac{\cancel{m\omega}\hbar}{2} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2}$

Luego la relación de incerteza es mínima $\Rightarrow$ la función de los estados $|\alpha, r\rangle$ son gaussianas

A diferencia de los estados coherentes, donde las varianzas están balanceadas.

En los estados coherentes squeezed las varianzas están escaleadas de forma inversa es decir, para $r>0$, $Var(\hat{x})$ se achica y $Var(\hat{p})$ aumenta.

f.- Calcule el valor medio de la energía $\hat{H}$ en el estado $|\alpha, r\rangle$.

**Sol:**

$$\langle \alpha,r|\hat{H}|\alpha,r\rangle = \langle\alpha|\hat{S}^{+}(r)\hat{H}\hat{S}(r)|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{S}^{+}(r)\left(\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2+\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)\hat{S}(r)|\alpha\rangle =$$

$$= \langle\alpha|\hat{S}^{+}(r)\hat{x}^2\hat{S}(r)|\alpha\rangle\frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2m}\langle\alpha|\hat{S}^{+}(r)\hat{p}^2\hat{S}(r)|\alpha\rangle =$$

$$= e^{-2r}\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle\frac{1}{2}m\omega^2 + e^{2r}\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle\frac{1}{2m} =$$

$$= e^{-2r}\frac{\hbar}{2\cancel{m\omega}}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2+1\right)\frac{1}{2}\cancel{m\omega^2} - e^{2r}\frac{\cancel{m\omega}\hbar}{2}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}-2|\alpha|^2-1\right)\frac{1}{2\cancel{m}} =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left[e^{-2r}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2+1\right) - e^{2r}\left(\alpha^2+\alpha^{*2}-2|\alpha|^2-1\right)\right] =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left[2\left(2|\alpha|^2+1\right)\left(\frac{e^{2r}+e^{-2r}}{2}\right) - 2\left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\left(\frac{e^{2r}-e^{-2r}}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left[\left(2|\alpha|^2+1\right)\cosh(2r) - \left(\alpha^2+\alpha^{*2}\right)\sinh(2r)\right] =$$

$$\boxed{\langle\hat{H}\rangle_{\alpha,r} = \hbar\omega\left[\left(|\alpha|^2+\frac{1}{2}\right)\cosh(2r) - \left(\frac{\alpha^2+\alpha^{*2}}{2}\right)\sinh(2r)\right]} =$$

(para $r\to 0^+$) $\langle\hat{H}\rangle_{\alpha,r} \longrightarrow \hbar\omega\left(|\alpha|^2+\frac{1}{2}\right)$.

$ch(r)\to 1$

$sh(r)\to 0$.

8.- Recordando que en la represent. de Heisenberg el operador $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en función de tiempo del oscilador armónico están dados por:

$$\begin{cases} \hat{x}_H(t) = \hat{x}\cos(\omega t) + \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin(\omega t) \\ \hat{p}_H(t) = \hat{p}\cos(\omega t) - m\omega\hat{x}\sin(\omega t). \end{cases}$$

Calcule y grafique el valor medio y las varianzas de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en función del tiempo para el estado $|0,r\rangle$. Calcule y grafique además el producto de varianzas.

¿Cómo espera que sea (cualit) la evol. temporal del estado coherente squeezed gral? $|\alpha,r\rangle$.

**Sol:** $\begin{cases}\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \\ \hat{a}|0\rangle = 0.\end{cases}$

$$\langle\hat{x}\rangle_{0,r}(t) = \langle 0,r|\hat{x}_H(t)|0,r\rangle = \langle 0|S^{+}(r)\left[\hat{x}\cos(\omega t)+\frac{\hat{p}}{m\omega}\sin(\omega t)\right]\hat{S}(r)|0\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle 0|\hat{S}^{+}(r)\hat{x}\hat{S}(r)|0\rangle}_{\langle\alpha,r|\hat{x}|\alpha,r\rangle_{\alpha=0}=0}\cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\underbrace{\langle 0|\hat{S}^{+}(r)\hat{p}\hat{S}(r)|0\rangle}_{\text{por el ej. (e.-)}\ \langle\hat{p}\rangle_{0,r}=0}\sin(\omega t) = 0.$$

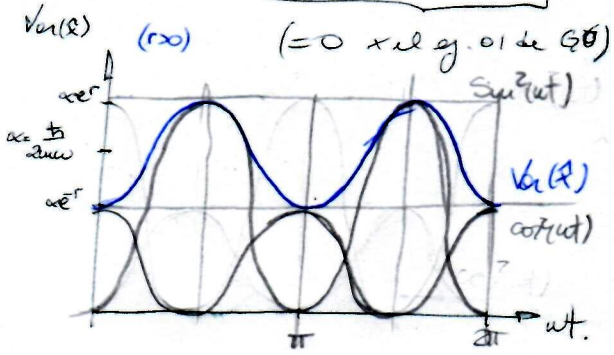
$$\langle\hat{p}\rangle_{0,r}(t) = \langle 0,r|\hat{p}_H(t)|0,r\rangle = \langle 0|\hat{S}^{+}(r)\left[\hat{p}\cos(\omega t) - m\omega\hat{x}\sin(\omega t)\right]\hat{S}(r)|0\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle 0,r|\hat{p}|0,r\rangle}_{=0}\cos(\omega t) - m\omega\underbrace{\langle 0,r|\hat{x}|0,r\rangle}_{=0}\sin(\omega t) = 0.$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{0,r}(t) = \langle 0 | \hat{S}^+(r) \left[ \hat{x}^2 \cos^2\omega t + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2} \sin^2(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}{m\omega} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \right] \hat{S}(r) | 0 \rangle =$$

$$\hat{\mathbb{I}} = \hat{S}(r)\hat{S}^+(r)$$

$$= \underbrace{\langle 0,r | \hat{x}^2 | 0,r \rangle}_{= e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos^2(\omega t) + \frac{1}{m^2\omega^2} \underbrace{\langle 0,r | \hat{p}^2 | 0,r \rangle}_{= e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}} \sin^2(\omega t) + \frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}{m\omega} \underbrace{\langle 0 | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | 0 \rangle}_{(=0 \text{ xel eg. 01 de } G\theta)} =$$

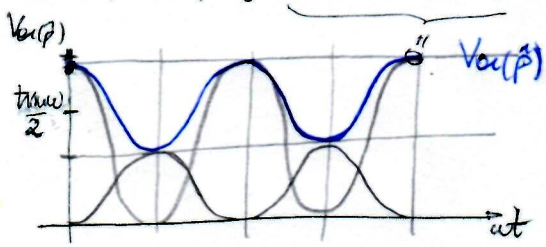



$$= e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega} \cos^2(\omega t) + e^{2r}\frac{\hbar}{2m\omega} \sin^2(\omega t)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{x}) = \langle \hat{x} \rangle_{0,r}(t) = \frac{\hbar}{2m\omega} \left( e^{-2r}\cos^2(\omega t) + e^{2r}\sin^2(\omega t) \right)}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_{0,r}(t) = \langle 0 | \hat{S}^+(r) \left[ \hat{p}^2 \cos^2(\omega t) + m^2\omega^2 \hat{x}^2 \sin^2(\omega t) - m\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) \right] \hat{S}(r) | 0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle 0,r | \hat{p}^2 | 0,r \rangle}_{= e^{2r}\frac{m\omega\hbar}{2}} \cos^2(\omega t) + m^2\omega^2 \underbrace{\langle 0,r | \hat{x}^2 | 0,r \rangle}_{= e^{-2r}\frac{\hbar}{2m\omega}} \sin^2(\omega t) - m\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) \underbrace{\langle 0 | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | 0 \rangle}_{=0}$$




$$\boxed{\mathrm{Var}(\hat{p}) = \langle \hat{p} \rangle_{0,r}(t) = \frac{\hbar m\omega}{2} \left( e^{2r}\cos^2(\omega t) + e^{-2r}\sin^2(\omega t) \right)}$$

$$\left[ \mathrm{Var}(\hat{x}) \mathrm{Var}(\hat{p}) \right]_{0,r}(t) = \frac{\hbar}{2\cancel{m\omega}} \left( e^{-2r}\cos^2(\omega t) + e^{2r}\sin^2(\omega t) \right) \frac{\hbar \cancel{m\omega}}{2} \left( e^{2r}\cos^2(\omega t) + e^{-2r}\sin^2(\omega t) \right)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left[ \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) + e^{4r}\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t) + e^{-4r}\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t) \right]$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left[ \cos^4(\omega t) + \sin^4(\omega t) + 2\sin^2(\omega t)\cos^2(\omega t)\cosh(4r) \right]$$

si $r \to 0 \Rightarrow \mathrm{Var}(\hat{x})\mathrm{Var}(\hat{p})\big|(t) = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \left( \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right)^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$ ✓