

• EJERCICIO A ENTREGAR GUÍA 9:

P1 TOMAREMOS EL HAMILTONIANO $H = H_0 + V$, DONDE:

$$\bullet H_0 = H_A + H_C = \frac{\hbar \omega_a}{2} \sigma_z + \hbar \omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$\bullet V = H_{int} = -\vec{d} \cdot \vec{E} = -i \frac{\hbar \Omega}{2} (\sigma_- + \sigma_+) \otimes (a - a^\dagger)$$

TOMAREMOS A V COMO LA PERTURBACIÓN. CONOCEREMOS LOS AUTOSTADOS DE H_0 ; TOMARE A LOS ESTADOS:

$$\underline{|g, n\rangle \quad \text{y} \quad |e, n-1\rangle}$$

CON SUS RESPECTIVOS AUTOVALORES:

$$|g, n\rangle \longrightarrow E_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar \omega_a}{2}$$

$$|e, n-1\rangle \longrightarrow E_{n-1} = \hbar \omega_c \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar \omega_a}{2}$$

$$\Rightarrow E_{n\pm} = \hbar \omega_c n \pm \frac{\hbar (\omega_a - \omega_c)}{2}$$

SI LLAMAMOS $\Delta = \omega_a - \omega_c$ A LA DESINTONÍA:

$$\boxed{E_{n\pm} = \hbar \omega_c n \pm \frac{\hbar \Delta}{2}}$$

AHORRA, USANDO PERTURBACIONES INDEPENDIENTE DEL TIEMPO, RESOLVEREMOS LO PEDIDO.

- a) i - ENCONTRAR AUTOESTADOS DE ENERGÍA A PRIMER ORDEN:
 ii - Calcular ENERGÍAS A SEGUNDO ORDEN.

LO HAREMOS PARA AMBOS ESTADOS $|g, n\rangle$ y $|e, n-1\rangle$:

$|e, n-1\rangle$:

$$\bullet E_{e, n-1}^{(0)} = \hbar\omega_c n + \frac{\hbar\Delta}{2}$$

$$\bullet E_{e, n-1}^{(1)} = \langle e, n-1 | V | e, n-1 \rangle$$

$$= \langle e, n-1 | -i\hbar\frac{\Omega}{2} (\sigma_- + \sigma_+) \otimes (a - a^\dagger) | e, n-1 \rangle = 0.$$

$$\bullet E_{e, n-1}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\langle g, m | V | e, n-1 \rangle|^2}{E_{e, n-1}^{(0)} - E_{g, m}^{(0)}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\langle e, m | V | e, n-1 \rangle|^2}{E_{e, n-1}^{(0)} - E_{e, m}^{(0)}}$$

$$= \frac{|\langle g, n | V | e, n-1 \rangle|^2}{E_{e, n-1}^{(0)} - E_{g, n}^{(0)}} + \frac{|\langle g, n-2 | V | e, n-1 \rangle|^2}{E_{e, n-1}^{(0)} - E_{g, n-2}^{(0)}}$$

$$= \frac{\left| +i\hbar\frac{\Omega\sqrt{n}}{2} \right|^2}{\hbar\Delta} + \frac{\left| -i\hbar\frac{\Omega}{2}\sqrt{n-1} \right|^2}{\hbar\Delta + 2\hbar\omega_c}$$

$$= \left[\frac{\Omega^2 n}{4\Delta} + \frac{\Omega^2 (n-1)}{4(\omega_a + \omega_c)} \right] \hbar$$

$$\rightarrow E_{e, n-1} = \hbar\omega_c n + \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\hbar}{4} \left(\frac{\Omega^2 n}{\Delta} + \frac{\Omega^2 (n-1)}{(\omega_a + \omega_c)} \right)$$

$$\rightarrow |+, n\rangle = |e, n-1\rangle + \frac{i\Omega\sqrt{n}}{2\Delta} |g, n\rangle - \frac{i\Omega\sqrt{n-1}}{2(\omega_a + \omega_c)} |g, n-2\rangle$$

$|g, n\rangle$:

• $E_{g_n}^{(0)} = \hbar\omega_c n - \frac{\hbar\Delta}{2}$

• $E_{g_n}^{(1)} = \langle g, n | V | g, n \rangle$

$$= \langle g, n | -i\hbar\frac{\Omega}{2} (\hat{v}_- + \hat{v}_+) \otimes (a - a^\dagger) | g, n \rangle = 0.$$

• $E_{g_n}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\langle g, m | V | g, n \rangle|^2}{E_{g_n}^{(0)} - E_{g_m}^{(0)}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\langle e, m | V | g, n \rangle|^2}{E_{g_n}^{(0)} - E_{e_m}^{(0)}}$

$$= \frac{|\langle e, n+1 | V | g, n \rangle|^2}{E_{g_n}^{(0)} - E_{e_{n+1}}^{(0)}} + \frac{|\langle e, n-1 | V | g, n \rangle|^2}{E_{g_n}^{(0)} - E_{e_{n-1}}^{(0)}}$$

$$= \frac{\left| +i\hbar\frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1} \right|^2}{\frac{-2\hbar\omega_c - \hbar\Delta}{-\hbar(\omega_c + \omega_a)}} + \frac{\left| -i\hbar\frac{\Omega}{2}\sqrt{n} \right|^2}{-\hbar\Delta}$$

$$= -\hbar \left[\frac{\frac{\Omega^2}{4} \frac{(n+1)}{\omega_a + \omega_c}}{\Delta} + \frac{\frac{\Omega^2}{4} \frac{n}{\Delta}}{\Delta} \right]$$

$$\Rightarrow E_{g_n} = \hbar\omega_c n - \frac{\hbar}{2} \Delta - \frac{\hbar}{4} \left[\frac{\Omega^2 (n+1)}{(\omega_a + \omega_c)} + \frac{\Omega^2 n}{\Delta} \right]$$

$$\Rightarrow |-, n\rangle = |g, n\rangle - \frac{i\Omega\sqrt{n+1}}{2(\omega_c + \omega_a)} |e, n+1\rangle + \frac{i\Omega\sqrt{n}}{2\Delta} |e, n-1\rangle$$

¿Qué condiciones debe cumplir $\Omega, \omega_a, \omega_c$ para que el desarrollo perturbativo sea consistente? NO DEBE DIVERGER NI LAS ENERGÍAS NI AUTOESTADOS:

$$\underline{\Omega^2 n \ll \Delta} \quad \text{y} \quad \underline{\Omega \sqrt{n} \ll \Delta}$$

b) Si considero estos resultados con la condición de consistencia, entonces puedo despreciar algunos términos:

$$\begin{aligned} \bullet E_{n\pm} &= \hbar \omega_c n \pm \frac{\hbar}{2} \Delta \pm \hbar \left(\frac{\Omega^2 n}{\Delta} + \frac{\Omega^2 (n \mp 1)}{\omega_a + \omega_c} \right) \\ &= \hbar \omega_c n \pm \frac{\hbar}{2} \Delta \left(1 + \frac{\Omega^2 n}{\Delta^2} \right) \end{aligned}$$

↳ ENERGÍA EN LA APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE DEL HAMILTONIANO JAYNES-CUMMINGS.

$$\bullet |n+\rangle = |e, n-1\rangle + \frac{i}{2} \frac{\Omega \sqrt{n}}{\Delta} |g, n\rangle - \frac{i \Omega \sqrt{n+1}}{2(\omega_a + \omega_c)} |g, n-2\rangle$$

$|e, n-1\rangle$ → COINCIDE CON AUTOESTADO $|+, n\rangle, |-n\rangle$ EN LA APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE DEL HAMILTONIANO JAYNES-CUMMINGS.

$$\bullet |n-\rangle = |g, n\rangle - \frac{i \Omega \sqrt{n+1}}{2(\omega_a + \omega_c)} |e, n+1\rangle + \frac{i \Omega \sqrt{n}}{2} |e, n-1\rangle$$

$|g, n\rangle$

c) Supongamos ahora $\omega_a = \omega_c$ (RÉGIMEN RESONANTE $\Delta = 0$)
 VEAMOS LOS AUTOESTADOS:

$$H_0 = \frac{\hbar \omega_a}{2} \hat{V}_z + \hbar \omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Si se sabe que $|g, n\rangle$ y $|e, n-1\rangle$ son AUTOESTADOS:

$$H_0 |g, n\rangle = -\frac{\hbar \omega_a}{2} + \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \stackrel{\Delta=0}{=} \hbar \omega_c n$$

$$H_0 |e, n-1\rangle = \frac{\hbar \omega_a}{2} + \hbar \omega_c \left(n - \frac{1}{2} \right) \stackrel{\Delta=0}{=} \hbar \omega_c n$$

por lo cual, el espectro de energías está DEGENERADO.

EN EL FUNDAMENTAL:

$$H_0 |g_0\rangle = 0. \rightarrow \text{DEGENERACIÓN } 1.$$

PRIMER EXCITADO:

$$H_0 |g_1\rangle = \hbar \omega_c \rightarrow \text{DEGENERACIÓN } 2$$

$$H_0 |e_0\rangle = \hbar \omega_c$$

Calculemos, PERTURBATIVAMENTE CON $V = H_{int}$ EL AUTOESTADO DEL PRIMER EXCITADO A ORDEN CERO Y ENERGÍA A PRIMER ORDEN.

$$\begin{aligned} \hat{V}_1 &= \langle g_1 | V | g_0 \rangle |g_1\rangle \langle g_0| + \langle g_1 | V | e_0 \rangle |g_1\rangle \langle e_0| + \\ &\quad + \langle e_0 | V | g_1 \rangle |e_0\rangle \langle g_1| + \langle e_0 | V | e_0 \rangle |e_0\rangle \langle e_0| \\ &= i\hbar \frac{\mathcal{E}}{2} |g_1\rangle \langle e_0| - i\hbar \frac{\mathcal{E}}{2} |e_0\rangle \langle g_1| \end{aligned}$$

por lo tanto) EN BASE $\{|e_0\rangle, |g_1\rangle\}$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\frac{\Omega}{2} \\ i\hbar\frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$i\hbar\frac{\Omega}{2} \cdot \sigma_y$

por lo cual, LOS AUTOESTADOS Y CORRECCIONES DE ENERGÍA (AUTOVALORES) SON:

$$E_{v_1}^{(1)} = \frac{\hbar\Omega}{2}, \quad |v_1\rangle = \frac{|e_0\rangle + i|g_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$E_{v_2}^{(1)} = -\frac{\hbar\Omega}{2}, \quad |v_2\rangle = \frac{|e_0\rangle - i|g_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ SON LOS AUTOESTADOS DEL PRIMER EXCITADO A ORDEN ~~SECO~~.
LOS ENERGÍAS SERÍAN:

$$\boxed{E_{\pm} = \hbar\omega_c \pm \frac{\hbar\Omega}{2}} \rightarrow \text{COINCIDE CON EL CASO RESONANTE DEL HAMILTONIANO DE JAYNES-CUMMINGS.}$$

P2 MISMO PROBLEMA QUE ANTES, CON UN ESTADO INICIAL $|e_n\rangle$ PERO AHORA CON PERTURBACIONES DEPENDIENTES DEL TIEMPO.

a) $|n_0\rangle = |e_n\rangle, \quad V = H_{int}$.

VEAMOS QUÉ TRANSICIONES SON POSIBLES (A PRIMER ORDEN) A OTROS AUTOESTADOS DE H_0 :

$$C_n^{(0)} = \langle n | I | n_0 \rangle = \delta_{nn_0}$$

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 e^{i\omega_{nn_0} t_1} \langle n | V | n_0 \rangle, \quad \text{con } \omega_{nn_0} = \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$$

$$C_n^{(0)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |n\rangle \neq |n_0\rangle \\ 1 & \text{si } |n\rangle = |n_0\rangle \end{cases}$$

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 e^{i\omega_{nn_0} t_1} \langle n | V | n_0 \rangle \rightarrow \text{SÓLO 2 TÉRMI- NOS NO SON NULOS.}$$

$$C_{g,n+1}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 e^{i(\omega_c - \omega_a) t_1} \langle g, n+1 | V | e, n \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \cdot i\hbar \frac{\Omega \sqrt{n+1}}{2} \int_0^t dt_1 e^{i(\omega_c - \omega_a) t_1}$$

$$= \frac{\Omega}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_c - \omega_a)t} - 1}{i(\omega_c - \omega_a)} \right) \sqrt{n+1}$$

$$C_{g,n-1}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 e^{-i(\omega_a + \omega_c) t_1} \langle g, n-1 | V | e, n \rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \cdot (-i\hbar) \cdot \frac{\Omega}{2} \sqrt{n} \int_0^t dt_1 e^{-i(\omega_a + \omega_c) t_1}$$

$$= \frac{\Omega}{2} \sqrt{n} \left(\frac{e^{-i(\omega_a + \omega_c)t} - 1}{i(\omega_a + \omega_c)} \right)$$

por lo tanto, es posible permanecer en el mismo estado $|e, n\rangle$ o transicionar a $|g, n+1\rangle$ ó $|g, n-1\rangle$, a primer orden.

b) Calculamos las probabilidades de transicion a otros estados:

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Prob}(|e_n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle) &= |C_{g, n+1}^{(1)}(t)|^2 \\
 &= \frac{\Omega^2 (n+1)}{4} \left| \frac{e^{i(\omega_c - \omega_a)t} - 1}{i(\omega_c - \omega_a)} \right|^2 \\
 &= \frac{\Omega^2}{4} \frac{(n+1)}{\Delta^2} (2 - 2\cos((\omega_c - \omega_a)t)) \\
 &= \frac{\Omega^2}{2} \frac{n+1}{\Delta^2} \cdot 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \\
 &= \frac{\Omega^2 (n+1)}{\Delta^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta \cdot t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Prob}(|e_n\rangle \rightarrow |g, n-1\rangle) &= |C_{g, n-1}^{(1)}(t)|^2 \\
 &= \frac{\Omega^2 \cdot n}{4} \left| \frac{e^{-i(\omega_a + \omega_c)t} - 1}{i(\omega_a + \omega_c)} \right|^2 \\
 &= \frac{\Omega^2 \cdot n}{4 (\omega_a + \omega_c)^2} (2 - 2\cos((\omega_a + \omega_c)t)) \\
 &= \frac{\Omega^2 n}{(\omega_a + \omega_c)^2} \sin^2\left(\frac{(\omega_a + \omega_c)t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

SI QUEREMOS QUE EL DESARROLLO SEA CONSISTENTE ENTONCES $\Omega^2 \ll \Delta^2$.

¿QUÉ PROBABILIDAD HAY DE IR AL ESTADO FUNDAMENTAL? (A PRIMER ORDEN).

LA ÚNICA FORMA QUE SUCEDA ES SI $n=1$:

$$\text{Prob}(|e_1\rangle \rightarrow |g_0\rangle) = \frac{\Omega^2}{(\omega_a + \omega_c)^2} \sin^2\left(\frac{(\omega_a + \omega_c)t}{2}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{SI } n \neq 1, \\ \text{LA PROBABILIDAD} \\ \text{ES NULA.} \end{array} \right)$$

c) EN EL CASO EN QUE $\omega_a = \omega_c$, ES DECIR $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Prob } (|e,n\rangle \rightarrow |g,n+1\rangle) &= \omega^2 (n+1) \left| \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta}{2}t\right)}{\frac{\Delta^2 t^2}{4}} \right| \frac{t^2}{4} \\ &\xrightarrow{\Delta=0} \\ &= \frac{\omega^2 (n+1) t^2}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Prob } (|e,n\rangle \rightarrow |g,n-1\rangle) = \frac{\omega^2 n}{4\omega_c^2} \cdot \sin^2(\omega_c t)$$

$$\bullet \text{ Prob } (|e,n\rangle \rightarrow |g,0\rangle) = \frac{\omega^2}{4\omega_c^2} \sin^2(\omega_c t)$$

d) AVERIGÜEMOS LA PROBABILIDAD DE QUE UN ESTADO $|e,n\rangle$ PASE A $|g,n+1\rangle$ O $|g,n-1\rangle$ PARA EL HAMILTONIANO JAYNES-CUMMINGS EN LA APROXIMACIÓN DE ONDA KORTANTE:

$$\bullet |e,n\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, +\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, -\rangle$$

CON:

$$|n+1, +\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |e,n\rangle + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |g,n+1\rangle$$

$$|n+1, -\rangle = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e,n\rangle + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |g,n+1\rangle$$

POR LO CUAL:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |e,n\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, +\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, -\rangle \right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t} \left(e^{-i \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, +\rangle - e^{i \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |n+1, -\rangle \right)$$

LOS PROBABILIDADES SON:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle) &= \left| \langle g, n+1 | \psi(t) \rangle \right|^2 \\ &= \left| e^{-i \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|^2 \\ &= \frac{\sin^2(\theta)}{4} \left| -2i \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}\right) \right|^2 \\ &= \sin^2(\theta) \cdot \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}\right) \end{aligned}$$

SABIENDO QUE $\sin(\theta) = \frac{\Omega \sqrt{n+1}}{\sqrt{\Omega^2(n+1) + \Delta^2}}$, ENTONCES:

$$\text{Prob}(|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle) = \frac{\Omega^2(n+1)}{\Omega^2(n+1) + \Delta^2} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2(n+1)} t}{2}\right)$$

SI CONSIDERAMOS CASO $\Omega^2 \ll \Delta^2$:

$$\text{Prob}(|e, n\rangle \rightarrow |g, n+1\rangle) = \frac{\Omega^2(n+1)}{\Delta^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$$

↳ COINCIDE CON ÍTEM (b).

$$\text{Prob}(|e, n\rangle \rightarrow |g, n-1\rangle) = \left| \langle g, n-1 | \psi(t) \rangle \right|^2$$

$$= 0 \rightarrow \text{COINCIDE CON ÍTEM (b) SI TOMAMOS APROXIMACIÓN RWA YA QUE } \frac{\Omega^2}{(\omega_a + \omega_c)^2} \rightarrow 0$$