

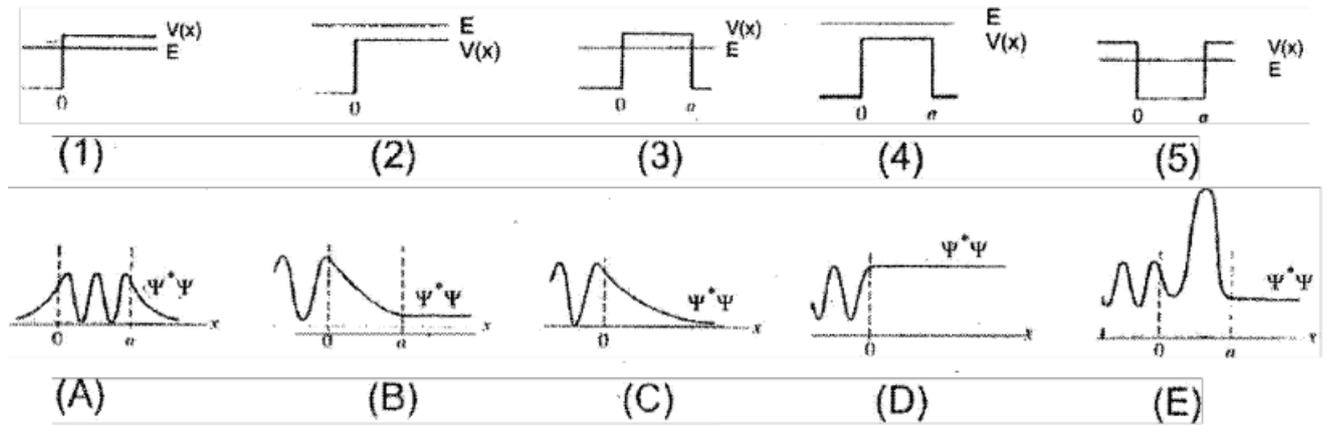
Práctica 0

Repaso de Física 4

1. Opción Múltiple. Órdenes de Magnitud

- (a) El radio típico de un átomo es
- A. 10^{-5} m.
 - B. 10^{-10} m.
 - C. 10^{-20} m.
 - D. 10^{-30} m.
- (b) Comparado con la longitud de onda de Compton del electrón el radio de Bhor es
- A. 100 veces más grande.
 - B. 10000 veces más chico.
 - C. Aproximadamente igual.
- (c) El número de fotones por segundo emitido por una lamparita es del orden de
- A. 10^3 .
 - B. 10^5 .
 - C. 10^{10} .
 - D. 10^{20} .
- (d) La energía del estado fundamental del átomo de Hidrógeno es del orden de
- A. 10^{-6} eV.
 - B. 10^{-3} eV.
 - C. 10 eV.
 - D. 10 MeV.
- (e) La velocidad promedio de un electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno es aproximadamente
- A. c.
 - B. 0,1c.
 - C. 10^{-2} c.
 - D. 10^{-5} c.
 - E. 10^{-10} c.
- (f) El tiempo de vida típico de un estado electrónico excitado de un átomo es
- A. 10^2 s.
 - B. 10^{-8} s.
 - C. 10^{-18} s.
 - D. 10^{-38} s.

2. Los diagramas (1)-(5) de la figura representan distintos tipos de potenciales unidimensionales en los que se encuentra una partícula con un determinado valor de energía



(a) Indicar qué gráfico de $\Psi^*\Psi$ corresponde a cada uno de los casos (1)-(5).

(b) Para cada uno de los casos (1)-(5), decir si el espectro de energía es discreto o continuo.

3. Partiendo de la ecuación de Schrödinger, derivar la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad $\rho(t, \mathbf{x}) \equiv |\Psi(t, \mathbf{x})|^2$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0,$$

siendo \mathbf{J} la corriente de probabilidad.

4. **Partícula en un anillo.** Hallar los niveles de energía de una partícula libre de masa m cuando el espacio es un anillo de perímetro L .

5. **¿Verdadero o Falso?** Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) La función de onda de una partícula está dada por $\psi(x) = A \cos(kx) + A \sin(2kx)$ (A, k son constantes reales). Entonces la distribución de impulsos es no nula solo para los valores $p = \pm \hbar k$ y $p = \pm 2\hbar k$.

(b) En problemas unidimensionales, el espectro de estados ligados es siempre no degenerado.

(c) Si $V(x)$ es un potencial unidimensional par, entonces los autoestados de energía tienen paridad definida (es decir, o son pares o son impares).

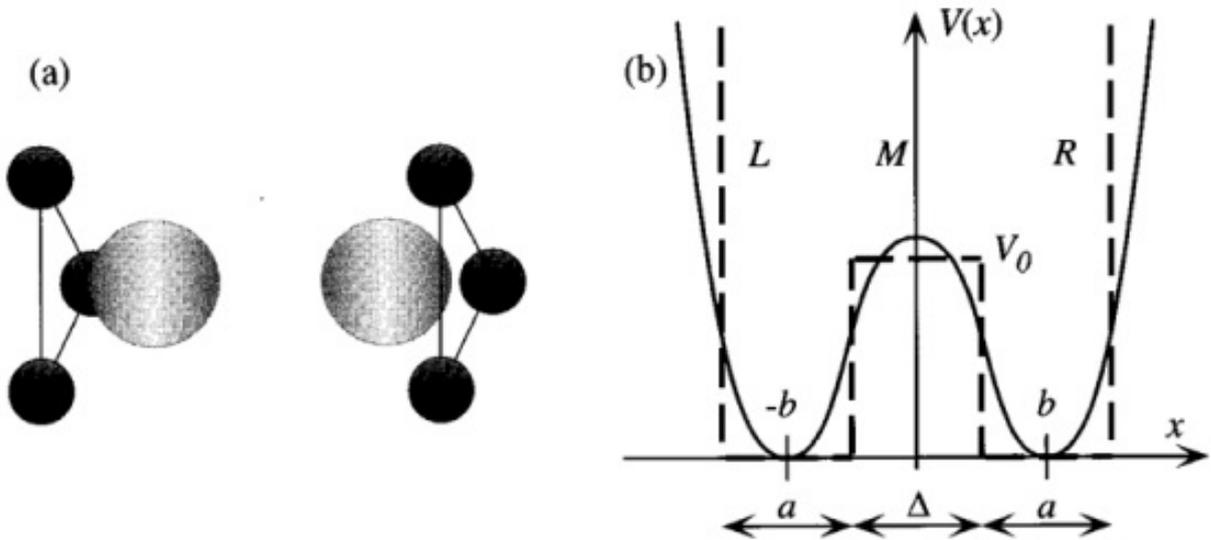
(d) Para el potencial unidimensional dado por $V(x) = \lambda \delta(x)$ hay solo un estado ligado.

(e) Para el autoestado de menor energía del oscilador armónico unidimensional se satura la relación de incerteza $\Delta x \Delta p$.

6. * **Una aplicación de pozos de potencial: Inversión del Nitrógeno**

La molécula de amoníaco (NH_3) tiene forma de pirámide, donde los átomos de H forman una base triangular y el átomo de N se encuentra en la cúspide. Existe un proceso conocido como “inversión del Nitrógeno” en el que la pirámide se invierte tal como se muestra en la figura (a).

Un modelo muy simple para este fenómeno considera un potencial unidimensional $V(x)$, donde x es la posición de una partícula ficticia de masa $M = 3m_H$, que simula el movimiento rígido de la base de la piramide. La línea continua de la figura (b) corresponde a $V(x)$, siendo el origen la posición del átomo de N, que se supone estático. Simplificaremos aún más el potencial, utilizando un pozo de paredes impenetrables de ancho $2a + \Delta$ en cuyo centro se encuentra una barrera de altura V_0 y ancho Δ (línea punteada). Para el caso del amoníaco, se tiene $a = 0.3 \text{ \AA}$, $\Delta = 0.3 \text{ \AA}$ y $V_0 = 0.25 \text{ eV}$. Analizaremos los estados con $E < V_0$.



- (a) Teniendo en cuenta la simetría de $V(x)$ y las condiciones de contorno, grafique las funciones de onda $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, correspondientes a los dos autoestados de menor energía. Suponiendo que en ambos casos $E < V_0$. Encuentre $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$, a menos de la constante de normalización.
- (b) Mostrar que la energía se obtiene de las siguientes expresiones: $\tan(ka) = -\frac{k}{q} \coth(q\Delta/2)$ para el estado fundamental y $\tan(ka) = -\frac{k}{q} \tanh(q\Delta/2)$ para el primer estado excitado (donde $k = \sqrt{2ME}/\hbar$ y $q = \sqrt{2M(V_0 - E)}/\hbar$).
- (c) Aproximar las expresiones del punto anterior para el caso en que $E \ll V_0$ y que $q\Delta \gg 1$ y obtener las energías de ambos autoestados ($q \approx \sqrt{2MV_0}/\hbar$). En particular, mostrar que la diferencia de energía entre ambos niveles es

$$E_2 - E_1 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2Ma^2} \frac{4e^{-q\Delta}}{qa}.$$

Calcular esta cantidad y comparar con el valor experimental $E_2 - E_1 = 9.84 \times 10^{-5} \text{ eV}$.

- (d) Suponer que a $t = 0$ la probabilidad de encontrar a la partícula ficticia está concentrada en el lado izquierdo del pozo. Encontrar una función de onda combinación lineal de ϕ_1 y ϕ_2 que describa esta situación. Calcular a qué tiempo T la máxima probabilidad de encontrar a la partícula está del lado derecho del pozo y determinar la frecuencia de inversión.

7. Repaso del oscilador armónico.

Considerar una partícula de masa m en un potencial de oscilador armónico $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

- (a) Demostrar que las funciones

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-x^2/(2x_0^2)}, \quad \psi_1(x) = A_1 x e^{-x^2/(2x_0^2)} \quad \text{y} \quad \psi_2(x) = A_2 \left[2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right] e^{-x^2/(2x_0^2)},$$

con $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, son soluciones de la ecuación de Schrödinger estacionaria con energías $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ y $E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$, respectivamente. Graficar esquemáticamente la densidad de probabilidad para cada función y hallar A_0 , A_1 y A_2 para que las funciones de onda estén normalizadas.

- (b) Verificar que $\psi_0(x)$ satura la relación de incerteza.
- (c) La ecuación de Schrödinger estacionaria para este potencial puede resolverse explícitamente y se obtiene un conjunto discreto de autoestados que tienen la forma

$$\psi_n(x) = A_n \left(\frac{x}{x_0} - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/(2x_0^2)},$$

y cuyas energías son $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Recordar la resolución de dicha ecuación (puede consultar por ejemplo la sección 2 del complemento C_V del tomo I del libro de Cohen Tannoudji, p. 537). *Más adelante en el curso veremos otro método más sencillo y elegante para obtener el espectro del oscilador armónico.*

8. Repaso del Átomo de Hidrógeno

Considerar el Hamiltoniano del electrón del Átomo de Hidrógeno dado por $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$, donde $m = 0.91 \times 10^{-30}$ Kg es la masa del electrón y $e = q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, con $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C la carga del electrón. No tener en cuenta que el electrón tiene espín.

- (a) Escribir la ecuación para las autofunciones y autovalores de H_0 . Proponer autoestados de la forma $\phi_{k,l,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} u_{k,l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ y demostrar que $u_{k,l}$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \right] u_{k,l}(r) = E_{k,l} u_{k,l}(r).$$

- (b) La ecuación diferencial anterior se puede resolver junto con la condición $u_{k,l}(0) = 0$ ¹. Al resolverla, se obtiene $E_{k,l} = -\frac{E_I}{(k+l)^2}$, con $E_I = \frac{me^4}{2\hbar^2}$ y $k = 1, 2, 3, \dots$ entero positivo. Los niveles de energía del Átomo de Hidrógeno quedan entonces determinados por la suma $n \doteq k+l$; es usual hacer referencia a las autofunciones correspondientes por su valor de n (en lugar de k), l y m . Demostrar que la degeneración del nivel de energía $E_{nlm} = -\frac{E_I}{n^2}$ es n^2 . Se dice que los autoestados con el mismo valor de energía (o, lo que es equivalente, con el mismo valor de n) forman una *capa* que se identifica por el número n .
- (c) Calcular la energía del nivel fundamental (respuesta: -13.6 eV).

¹Para entender esta condición de regularidad, ver por ejemplo la discusión anterior a la ecuación (A-30) del capítulo VII del libro de Cohen-Tannoudji. La resolución de la ecuación diferencial se puede encontrar en la sección C-3b del capítulo VII del mismo libro.

- (d) Es común utilizar la denominada notación espectroscópica para hacer referencia a subconjuntos o *subcapas* de una dada capa. Dicha notación consiste en dar el valor de n de la capa, seguido de una letra que identifica el valor de ℓ :

$$\ell = 0 \longleftrightarrow s$$

$$\ell = 1 \longleftrightarrow p$$

$$\ell = 2 \longleftrightarrow d$$

$$\ell = 3 \longleftrightarrow f$$

$$\ell = 4 \longleftrightarrow g$$

Así, por ejemplo, para hacer referencia al estado fundamental ($n = 1, l = 0, m = 0$), nos referimos a la subcapa $1s$. La subcapa $2s$ contiene un solo estado, el dado por $n = 2, l = 0$ y $m = 0$. La subcapa $2p$ contiene tres estados, que tienen $n = 2, l = 1$ y se diferencian entre sí por el valor de m (que puede ser 1, 0 o -1). ¿Cuántos estados hay en la subcapa $3p$? ¿Y en la $3d$? ¿Cuál es la energía de estas dos subcapas? ¿Puede hablarse de la subcapa $3f$?