

It's not merely that you don't know all three components of the angular momentum; there simply aren't three components (...)

D. Griffiths.

En esta guía introduciremos el concepto de grupos y álgebras. Nos enfocamos en particular en estudiar el álgebra $su(2)$, o álgebra del momento angular. Veremos cómo surge el espín y revisaremos algunos experimentos fundamentales relacionados con este tema.

Álgebra del momento angular

Los ejercicios de esta sección con * son optativos y tratan cuestiones generales del álgebra $su(2)$ y su grupo $SU(2)$.

47 * **Grupo $SU(2)$.** Considere las matrices unitarias de determinante uno de 2×2 : $SU(2)$. Muestre que forman un grupo con el producto '.' dado por multiplicar matrices, es decir, que satisfacen

- $g.g' \in SU(2)$ si $g, g' \in SU(2)$
- $\forall g \in SU(2) \quad \exists g' \in SU(2)$ tal que $g'.g = g.g' = \text{Id}$. Se suele decir que $g' = g^{-1}$.
- La matriz identidad satisface $g.\text{Id} = \text{Id}.g = g, \quad \forall g \in SU(2)$.
- $g.(h.f) = (g.h).f$, para todo $g, h, f \in SU(2)$

Mostrar que toda matriz de $SU(2)$ se puede escribir de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con α y β números complejos tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Concluir que los elementos de $SU(2)$ corresponden a puntos en una tres-esfera S^3 embebida en \mathbb{R}^4 . Los grupos que admiten una estructura de superficie (*variedad* es el término) se denominan grupos de Lie: en este caso al grupo $SU(2)$ se le da la estructura diferenciable de S^3 .

48 * **Generadores de $SU(2)$.** La versión infinitesimal de $SU(2)$, su álgebra: se define el álgebra de un grupo de Lie como el tangente al elemento identidad. Para entender esto, considere una familia de elementos de $SU(2)$ arbitrarios en la forma del ejercicio anterior, con $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ funciones del parámetro t restringidas a la condición (A) $|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 = 1$. Queremos tomar el tangente en la identidad, por lo tanto $\alpha(0) = 1$ y $\beta(0) = 0$. Derive respecto a t cada elemento de matriz así como la condición (A), evalúe a $t = 0$ y concluya que el álgebra $su(2)$ se puede pensar como las matrices de la forma

$$\dot{g}|_{t=0} = X = \begin{pmatrix} i\lambda & z \\ -\bar{z} & -i\lambda \end{pmatrix}$$

con λ real y z complejo.

49 **Álgebra $su(2)$.** El álgebra de $su(2)$ en términos abstractos: considerar un espacio vectorial de tres dimensiones, con un producto que en una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ toma la forma:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

Mostrar que este espacio vectorial es un álgebra de Lie, o sea que el producto satisface la propiedad de Jacobi:

$$[J_1, [J_2, J_3]] + [J_2, [J_3, J_1]] + [J_3, [J_1, J_2]] = 0$$

Este es el álgebra del grupo $SU(2)$ (denominada $su(2)$) y codifica toda la información del grupo (no siempre sucede esto con otros grupos y sus álgebras). Los J_i se denominan *generadores* del grupo, ya que al exponenciarlos se recupera el grupo de Lie.

Aclaración: este es el álgebra $su(2)$ pero donde los generadores no tienen la forma de la matriz X del ejercicio anterior, sino iX , por esto es que va a aparecer siempre $-iJ_j$ en las exponenciales para formar un elemento del grupo.

50 Representación fundamental de $su(2)$. Se llama representación fundamental a aquella en que los matrices de $n \times n$ de un grupo actúan naturalmente sobre un espacio vectorial de dimensión (compleja) n . En el caso de $SU(2)$ esta es la representación de espín 1/2 (que tiene dimensión 2). Mostrar que si σ_i con $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli, entonces

- $J_i = \sigma_i/2$ satisface precisamente el producto del ejercicio anterior, donde $[,]$ es conmutador de las matrices. Esta es la representación 2-dimensional de $su(2)$, la llamada de espín 1/2.
- Cualquier elemento de $SU(2)$ en la representación fundamental es de la forma $\exp(-i\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\phi)$, con n_i las componentes de un versor y ϕ un ángulo.
- Una rotación en cualquier dirección y de ángulo 2π en un espacio 2-dimensional equivale a multiplicar por -1.

51 Una representación ρ (lineal) del álgebra de momento angular debe cumplir $[\rho(J_i), \rho(J_j)] = \rho([J_i, J_j])$, entre otras cosas (para más detalles pueden consultar el apunte subido en material adicional). El ejercicio anterior, por ejemplo, nos da una representación de dimensión 2 de $su(2)$. Mostrar que las siguientes matrices de 3×3 son una representación de dimensión 3 de $su(2)$:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con $\rho : J_i \mapsto F_i$.

52 Clasificación de las representaciones de $su(2)$. Para hablar de otras representaciones de $su(2)$, construya los operadores de subida y bajada $J_{\pm} \doteq J_x \pm iJ_y$ a partir de la base del ejercicio 49, tales que $[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$. Muestre además que

- Un Casimir (elemento que conmuta con todo) de $su(2)$ es $J^2 = J_i J_i$. Se puede ver que es el único Casimir de $su(2)$.
- Mostrar que si m es autovalor de J_z y $j(j+1)$ es autovalor de J^2 , con autoestado correspondiente $|j m\rangle$, entonces j es semi-entero positivo, m varía en saltos de una unidad y

$$-j \leq m \leq j$$

(usar que J_i deben ser observables). Concluir que los estados $|j m\rangle$ son una base ortonormal de $\mathbb{C}^{j(j+1)}$, para j fijo. Esta es una *representación irreducible* (dado j). Ayuda: ver por ejemplo la sección 3.5 del Sakurai o el capítulo 7 del Ballentine.

53 Si $\langle j m | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$, mostrar que

$$\langle j' m' | J_{\pm} | j m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \delta_{jj'} \delta_{m', m \pm 1}$$

- 54 Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, las matrices que representan a los operadores J^2 , J_x , J_y , y J_z en el subespacio generado por la base $\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z . Verifique explícitamente (multiplicando las matrices) la relación $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$.
- (a) Encuentre la base $\{|j, m_y\rangle_y\}$ de autoestados de J^2 y J_y de dicho subespacio. Escríbala como combinación lineal de los $|j, m\rangle$.
- (b) Considere el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle - |1, -1\rangle)$. Si se mide J_x , ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide J_y .
- (c) Sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide J_z y se obtiene \hbar , e inmediatamente después se mide J_y . ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

Momento angular orbital

- 55 **Una forma alternativa de ver que L_z tiene autovalores enteros.**

El objetivo de este ejercicio es demostrar que los autovalores de L_z son enteros usando el conocimiento del espectro del oscilador armónico unidimensional que obtuvimos en la práctica anterior. Para ello:

- (a) Escriba $L_z = xp_y - yp_x$ en término de los operadores q_i , p_i definidos por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + p_y), & q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - p_y), \\ p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_x - y), & p_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + p_x). \end{aligned}$$

- (b) Demostrar que $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ y que $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$.
- (c) En base a los resultados de los incisos anteriores, concluir que los autovalores de L_z deben ser enteros. Justificar.

- 56 **Rotor rígido simétrico.**

Considere un rotor rígido simétrico, cuyo hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_\rho} + \frac{L_z^2}{2I_z}, \quad \text{con } I_\rho \geq I_z > 0.$$

- (a) Hallar el espectro de energía y demostrar que hay niveles degenerados. Hallar la degeneración de cada nivel de energía en el caso en que $I_\rho = I_z$.
- (b) Se realizan sobre el sistema mediciones sucesivas de los siguientes observables: $\{\mathbf{L}^2, L_x, \mathbf{L}^2, L_z\}$, arrojando dichas mediciones los resultados: $\{6\hbar^2, 2\hbar, 6\hbar^2, \hbar\}$. ¿Cuál es el estado del sistema después de la última medición? Hallar la dispersión de L_x en dicho estado.

- 57 Muestre que el operador momento angular L_i en la representación de coordenadas viene dado por

$$\vec{L} = -i\hbar \left[\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right].$$

Esto muestra que las componentes de momento angular actúan en $L^2(S^2)$ sin importar la dependencia radial de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$.

58 Construya los armónicos esféricos $Y_{1,m} \in L^2(S^2)$. Para ello, resuelva primero $L_+ Y_{1,1} = 0$ (L_+ en la representación de coordenadas) y aplique luego el operador L_- a $Y_{1,1}$ (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados del problema anterior, escriba la combinación lineal de éstos que es autoestado de L_y con autovalor \hbar . Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación de coordenadas.

59 **Una forma de ver que el momento angular orbital no puede ser semientero.** Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l , por ejemplo $1/2$, para el impulso angular orbital. A partir de

$$L_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

podemos deducir, como de costumbre

$$Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) \propto e^{i\phi/2} \sqrt{\sin\theta}.$$

Intente construir entonces $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$ de dos maneras diferentes:

- (a) aplicando L_- a $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$,
- (b) usando que $L_- Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l al menos para $l = 1/2$).

60 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por:

$$\Psi(x) = (x + y + 3z) f(r).$$

- (a) ¿Es Ψ autofunción de L^2 ? Si es así, ¿cuál es el valor de l ? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2 ?
- (b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?
- (c) Suponga que se conoce de alguna manera que $\Psi(x)$ es una autofunción de energía con autovalor E . Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

61 **¿Verdadero o falso?** Se tiene una partícula sin espín, cuyo Hamiltoniano no depende del tiempo. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

- (a) Si $[H, L_z] = 0$, entonces los niveles de energía no dependen de m .
- (b) Si $[H, \mathbf{L}^2] = 0$, entonces los niveles de energía no dependen de ℓ .
- (c) Si $[H, \mathbf{L}^2] = 0$ y el sistema se encuentra en un autoestado de \mathbf{L}^2 pero no de H a tiempo $t = 0$, entonces se encontrará en un autoestado de \mathbf{L}^2 a todo tiempo posterior.

Espín

62 Se tiene un electrón en un potencial dado por $V = \frac{1}{2}kx^2 + \gamma s_z$, donde s_z es la componente del espín en la dirección z . Hallar el espectro de energía y los valores de γ para los cuales hay degeneración.

63 **Precesión del espín (la tercera es la vencida).**

Considere el problema de la precesión del espín. Encuentre la evolución de $|S_x, +\rangle$ en el picture de Schrodinger pero ahora entendiendo al operador evolución como una rotación en \hat{z} (ya que H es proporcional a S_z).

64 Experimento de Stern-Gerlach.

Un haz de átomos incide con velocidad v en la dirección y sobre un analizador del tipo Stern-Gerlach orientado en la dirección z . Como resultado, el haz original se divide en dos, cada uno con componente de espín según z bien definida: $S_z = -\hbar/2$ y $S_z = \hbar/2$, respectivamente.

- (a) A continuación se hace pasar al haz con $S_z = \hbar/2$ por otro analizador, exactamente igual al primero, pero separado a una distancia d y rotado en $\pi/2$ sobre el eje z , de modo que observa la componente x de los espines. ¿Cuáles son las probabilidades de obtener $\pm\hbar/2$ con el segundo analizador?
- (b) Suponga ahora que en la zona entre los dos analizadores hay un campo magnético constante $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$, al cual (solamente) se acopla el espín mediante un potencial: $V = -\frac{2\mu}{\hbar}BS_z$. Suponiendo que el segundo analizador separa las componentes del espín según x , exprese las probabilidades de medir $S_x = \pm\hbar/2$ como función de B y del tiempo $T = d/v$ transcurrido entre las mediciones realizadas en el primer y el segundo analizador.