Due to the lucidity and apparently incontestable character of the argument, the paper of Einstein, Podolsky and Rosen created a stir among physicists and has played a large role in general philosophical discussion. Certainly, the issue is of a very subtle character and suited to emphasize how far, in quantum theory, we are beyond the reach of pictorial visualization.

N. Bohr.

Esta guía tiene una sección dedicada a estudiar el problema de la suma de momento angular y otra donde, utilizando algunos ejemplos previos de la práctica, ahondaremos un poco más en el concepto de entrelazamiento.

Suma de momento angular

$\boxed{65}$ **1/2 + 1/2.** Considere dos partículas con espín 1/2.

(a) Escribir los elementos de la base del producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada espín, que además son autoestados comunes de S^2 y S_z total (triplete y singlete)

$$\{|s=1,m=1\rangle\,,\quad |s=1,m=-1\rangle\,,\quad |s=1,m=0\rangle\}\,,\quad \{|s=0,m=0\rangle\}\,,$$

en función de los kets en la representación $\{m_1, m_2\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad.

(b) Verificar que el estado del singlete ($s = 0$) es antisimétrico ante el intercambio de partículas, mientras que los estados del triplete ($s = 1$) son simétricos.

(c) Evaluar cuáles de los estados del triplete y singlete son autoestados del operador de espín para cada partícula en alguna dirección y pensar qué sentido tiene en cada caso hablar de la alineación relativa entre los espines. ¿Qué diferencia a los estados $|s=0,m=0\rangle$ y $|s=1,m=0\rangle$?

$\boxed{66}$ **1/2 + 1.** Considere una partícula de espín 1/2 en un estado con $l = 1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l,s,m_l,m_s\rangle$.

(b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max}-1, j_{max}-1\rangle$.

(d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max}-1, m\rangle$.

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

$\boxed{67}$ **1 + 1.** Considerar dos momentos angulares $\mathbf{J}_1$ y $\mathbf{J}_2$, con autovalores $\hbar j_i(j_i+1)$ de $\mathbf{J}_i^2$ con $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$. Encontrar los autoestados comunes a $(\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2)^2$, $J_{1z}+J_{2z}$, $\mathbf{J}_1^2$ y $\mathbf{J}_2^2$. Verificar el resultado obtenido utilizando la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan.

$\boxed{68}$ Una partícula A de espín 3/2, en un estado con momento angular nulo, se desintegra mediante una reacción

$$A \to B + C$$

que *conserva el momento angular total*, siendo B y C partículas de espín 1/2 y 0 respectivamente.

(a) ¿Qué valores puede tomar el momento angular orbital total del par de partículas B y C?

(b) ¿Cuáles son los autovalores de la proyección en el eje z del espín de la partícula A? Si se conoce que la partícula A se encontraba en un estado con máxima proyección de espín en el eje z antes de decaer, y luego de la reacción se encuentra que a la partícula B en el estado con mínima proyección de espín en el eje z, ¿cuál es el momento angular orbital total del par $B-C$?

(c) Para cada valor de la proyección de espín en z de la partícula A y todos los correspondientes valores de momento angular orbital total del par $B-C$, determinar la probabilidad de encontrar a la partícula B con proyección de espín z máxima en la dirección z.

$\boxed{69}$ **1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2.** Cierto sistema cuántico de cuatro partículas (distinguibles), todas de espín 1/2, tiene un hamiltoniano dado por

$$H_0 = -\gamma\left(\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 + \bar{S}_2 \cdot \bar{S}_3 + \bar{S}_3 \cdot \bar{S}_4 + \bar{S}_4 \cdot \bar{S}_1\right)\ ,$$

donde γ es una constante positiva y $\bar{S}_i$ es el operador espín de la partícula i-ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).

(a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema? Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los autoestados).

(b) Se realizan sobre el sistema mediciones de $\mathbf{S}^2$ y S_z (siendo $\mathbf{S}$ el operador espín total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$ y $\hbar$ respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?

Entrelazamiento

$\boxed{70}$ Considerar un sistema de espines 1/2 A, B y C. Mostrar que existen estados del sistema de los tres electrones que están entrelazados entre los subsistemas AB y C, pero que no tienen entrelazamiento entre A y BC. Esto nos dice que el entrelazamiento bipartito no depende sólo del estado sino también de la partición del sistema que uno elige.

$\boxed{71}$ **Máquinas imposibles.**
Considere la siguiente jerarquía de máquinas imposibles (las tres primeras sí son posibles en el mundo clásico!):

- Teleportador sin entrelazamiento: Es una máquina que permite enviar un estado cuántico del laboratorio A al B a través de una señnal clásica (un teléfono).
- Copiador cuántico universal: Es una máquina capaz de obtener dos copias idénticas de un estado cuántico arbitrario.
- Medidor simultáneo: Es una máquina que dado un estado cuántico de entrada permite como salida obtener valores simultáneos de dos observables arbitrarios.
- Teléfono de Bell: Este aparato permite a A, realizando una medición, enviar información a B. (Por lo tanto, si A y B están suficientemente separados, permite transmitir información a velocidad superlumínica).

(a) Argumentar que con un teleportador sin entrelazamiento se puede construir un copiador cuántico, y con éste se puede construir un medidor simultáneo. *Referencia: "Quantum Information Theory: an Invitation", R. F. Werner, arXiv:quant-ph/0101061*

(b) Utilizando un estado entrelazado, vimos que sí es posible teleportar un estado cuántico. Pensar por qué motivo esto no entra en conflicto con el hecho de que no existen copiadores cuánticos universales.

72 **Desigualdad de Tsirelson.**

Para $Q = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $R = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $S = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $T = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, siendo $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$ versores reales en tres dimensiones, mostrar que vale

$$(Q \otimes S + R \otimes S + R \otimes T - Q \otimes T)^2 = 4I + [Q, R] \otimes [S, T] \ .$$

Usar este resultado para probar la desigualdad de Tsirelson,

$$\langle Q \otimes S + R \otimes S + R \otimes T - Q \otimes T \rangle \leq 2\sqrt{2} \, .$$

73 **Multiple choice**

(a) De los siguientes estados, sólo uno de ellos no viola la desigualdad CHSH ¿Cuál es?

A. $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$.
B. $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$.
C. $\frac{1}{\sqrt{5}} (|0\rangle \otimes |0\rangle + 2\,|1\rangle \otimes |1\rangle)$.
D. $\frac{1}{3} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$.
E. $\frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$.

(b) De los estados $|j, m\rangle$ construidos en el Ejercicio 67 con $j = 1$, ¿cuántos son estados entrelazados?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.
E. 4.