Capítulo 3

Espacios vectoriales

3.1. Espacios y subespacios vectoriales

Definición 3.1. *Un* ***espacio vectorial*** *(o lineal) es un conjunto no vacío $\mathscr{V}$, cuyos elementos se denominan* vectores*, en el que hay definidas dos operaciones, suma y multiplicación por escalares (números reales o complejos) que satisfacen los siguentes axiomas. Para vectores arbitrarios* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *y escalares c y d:*

1. *la suma es una operación interna:* $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\mathscr{V}$,
2. *la suma es conmutativa:* $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
3. *la suma es asociativa:* $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$,
4. *elemento neutro de la suma:* $\exists\mathbf{0}\in\mathscr{V}\mid\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v},\ \forall\mathbf{v}\in\mathscr{V}$,
5. *elemento inverso en la suma:* $\forall\mathbf{v}\in\mathscr{V},\ \exists\mathbf{v}'\in\mathscr{V}\mid\mathbf{v}+\mathbf{v}'=\mathbf{0}$, *se escribe* $\mathbf{v}'=(-\mathbf{v})$,
6. *la multiplicación por un escalar produce un vector:* $c\,\mathbf{v}\in\mathscr{V}$,
7. *distributividad I:* $c\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\,\mathbf{u}+c\,\mathbf{v}$,
8. *distributividad II:* $(c+d)\,\mathbf{v}=c\,\mathbf{v}+d\,\mathbf{v}$,
9. *asociatividad:* $c(d\mathbf{v})=(cd)\,\mathbf{v}=cd\,\mathbf{v}$,
10. $1\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}$.

El vector $\mathbf{0}$ es único y, dado $\mathbf{v}$, también lo es $-\mathbf{v}$. Además $0\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$, $c\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$ y $-\mathbf{v}=(-1)\,\mathbf{v}$.

Ejemplo 3.2.

- Los vectores libres, flechas (segmentos rectos dirigidos) que se consideran iguales si tienen la misma dirección y longitud, son un espacio vectorial definiendo la suma por la regla del paralelogramo, y el producto por un escalar $c\mathbf{v}$ como un escalamiento de $\mathbf{v}$ (contando con el signo)

- $\mathbf{R}^n$, el conjunto de vectores columna de números reales

$$\mathscr{V} = \mathbf{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\}, \qquad x_i \in \mathbf{R} \tag{3.1}$$

  es un espacio vectorial, siendo el conjunto de escalares $\mathbf{R}$. Los espacios de vectores fila también son espacios vectoriales.

- $\mathbf{C}^n$, el conjunto de vectores columna de números complejos

$$\mathscr{V} = \mathbf{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \right\}, \qquad z_i \in \mathbf{C}$$

  es un espacio vectorial, siendo el conjunto de escalares $\mathbf{C}$. En general $\mathbf{F}^n$ denota $\mathbf{R}^n$ ó $\mathbf{C}^n$ ($\mathbf{F}$ es $\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$)

- El conjunto de “vectores infinitos” $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, con la suma y el producto por escalares habitual, es un espacio vectorial. Señales causales y no causales.

- El conjunto de polinomios de variable t, que se denota por $\mathbf{R}[t]$, es un espacio vectorial con las operaciones del ejemplo anterior. El conjunto de polinomios de grado menor o igual a un grado dado n es un espacio vectorial.

- El conjunto $C(\mathbf{R})$, de funciones continuas en la recta real, definiendo la suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por un número real $(cf)(x) = cf(x)$, es un espacio vectorial.

- El espacio de matrices de $m \times n$, denotado $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$, es un espacio vectorial.

- Los conjuntos de funciones $f : A \to \mathbf{F}$ con valores reales o complejos sobre un conjunto cualquiera A, con las operaciones definidas como en el ejemplo anterior. Todos los ejemplos anteriores son subcasos de este.

Subespacios vectoriales

Definición 3.3. *Un subconjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{V}$ de un espacio vectorial $\mathscr{V}$ es un* ***subespacio vectorial*** *si él mismo es un espacio vectorial, utilizando las operaciones* $(+,\cdot)$ *heredadas de $\mathscr{V}$.*

Se suele decir simplemente subespacio, en lugar de subespacio vectorial.

El criterio práctico para demostrar si un subconjunto determinado $\mathscr{H}$ es un subespacio vectorial es comprobar que es *algebraicamente cerrado*. Esto consiste en comprobar las siguientes propiedades.

Proposición 3.4 (Criterio de subespacio vectorial)**.** *$\mathscr{H}$ es un subespacio lineal si se cumple que*

1. *la suma es cerrada, es decir, la suma de dos vectores del espacio, está dentro del espacio: $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathscr{H} \Rightarrow \mathbf{v}+\mathbf{w} \in \mathscr{H}$;*
2. *el producto por cualquier escalar de cualquier vector de $\mathscr{V}$ está en $\mathscr{H}$: $\forall c \in \mathbf{R}$ y $\forall \mathbf{v} \in \mathscr{H} \Rightarrow c\mathbf{v} \in \mathscr{H}$.*

Es decir, todas las combinaciones lineales de elementos de $\mathscr{H}$ están dentro de $\mathscr{H}$.

Un criterio rápido para descartar que un conjunto es un (sub)espacio vectorial es observar, si se da el caso, que el vector $\mathbf{0}$ no pertenece al conjunto. Por supuesto, hay conjuntos que contienen a $\mathbf{0}$ que no son espacios vectoriales.

Ejemplo 3.5. Los siguientes conjuntos satisfacen el criterio de la proposición 3.4, y por tanto son ejemplos de subespacios.

1. El subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$.
2. En $\mathbf{R}^2$, el conjunto $\left\{\begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid v_1 \in \mathbf{R}\right\}$ es un subespacio vectorial. En general, cualquier recta $\{\alpha\,\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \wedge \alpha \in \mathbf{R}\}$ es un subespacio vectorial.
3. El conjunto de vectores $\mathscr{H} = \left\{\begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix},\ a,b \in \mathbf{R}\right\}$ es un espacio vectorial, que geométricamente es un plano en el espacio que

pasa por el origen.

4. Un plano que no pasa por el origen no es un subespacio vectorial.

Demostremos, por ejemplo, 3. Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{H}$ entonces

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2a'+b' \\ b' \\ a' \end{bmatrix}, \qquad a, b, a', b' \in \mathbf{R}$$

Entonces

$$\mathbf{v}+\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a'+b' \\ b' \\ a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+b+2a'+b' \\ b+b' \\ a+a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a''+b'' \\ b'' \\ a'' \end{bmatrix}$$

con $a'' = a + a'$ y $b'' = b' + b'$, por lo que $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ pertenece a $\mathscr{H}$. Y

$$c\mathbf{v} = c\begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(ca)+(cb) \\ cb \\ ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a'+b' \\ b' \\ a' \end{bmatrix}$$

con $a' = ca$ y $b' = cb$, así que también $c\mathbf{v} \in \mathscr{H}$. Por el criterio de la proposición 3.4, $\mathscr{H}$ es un subespacio (de $\mathbf{R}^3$, v. figura 3.1)

Los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal en espacios vectoriales generales son totalmente análogos a los correspondientes en $\mathbf{R}^n$ (v. definiciones 1.19 y 1.37) El siguiente teorema ilustra el ejemplo prototípico de subespacio vectorial.

Teorema 3.6. *El espacio* $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *generado por* p *vectores* $\mathbf{v}_i \in \mathscr{V}$, $i = 1, \ldots p$ *(ver Definición 1.21) es un subespacio vectorial de* $\mathscr{V}$.

La demostración se deja como ejercicio.

El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ se dice que genera el subespacio $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ y, dado un subespacio $\mathscr{H}$, un **conjunto generador** de $\mathscr{H}$ es un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ tal que $\mathscr{H} = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. De hecho,

la forma preferida de especificar un subespacio vectorial, si ello es posible, suele ser dar un conjunto de generadores apropiados.

Ejemplo 3.7. Todo subespacio de $\mathbf{R}^3$ es de uno de los siguientes tipos

- el origen, es decir, el subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$;
- una recta, generada por un vector;

- un plano generado por dos vectores linealmente independientes;
- o todo el espacio $\mathbf{R}^3$, que se puede generar con tres vectores linealmente independientes.

Ejemplo 3.8. El conjunto $\mathscr{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix}, \ a,b \in \mathbf{R} \right\}$ dado en el ejemplo 3.5, se puede escribir como un conjunto tipo Gen:

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 2a+b \\ b \\ a \end{bmatrix}, \ a,b \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ a,b \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

por lo que (como se comprueba de otra manera más laboriosa en ese ejemplo) es un subespacio vectorial según el teorema 3.6. En la figura 3.1 se ilustra cómo este subespacio es un plano que pasa por el origen dentro del espacio $\mathbf{R}^3$.

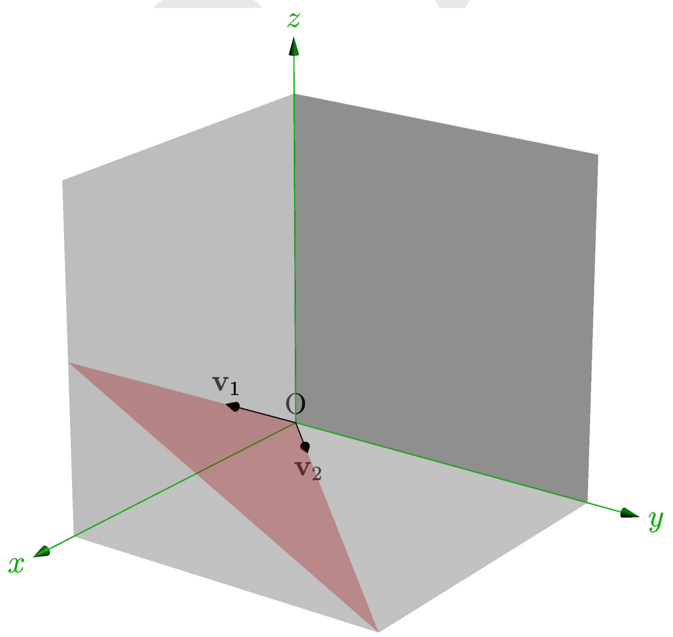

Figura 3.1: Interpretacion geométrica de Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, con $\mathbf{v}_1 = (2,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$.

3.2. Espacios nulos y columna de una matriz

Hay dos subespacios lineales asociados a cualquier matriz A de $m \times n$. Se trata del espacio nulo $\operatorname{Nul} A$ y el espacio columna $\operatorname{Col} A$. Están asociados al teorema I y al teorema S, es decir, al problema del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y al problema del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, para todos los vectores $\mathbf{b}$.

El espacio nulo de una matriz.

Ejemplo 3.9. El conjunto solución de una ecuación lineal homogénea

$$\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$$

es un subespacio lineal de $\mathbf{R}^3$. Efectivamente, si (x, y, z) y (x', y', z') son soluciones del sistema, entonces $(x, y, z)+(x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$ y $d \cdot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$ son también soluciones porque

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = ax + by + cz + ax' + by' + cz' = 0 + 0,$$
$$a(dx) + b(dy) + c(dz) = d(ax + by + cz) = d \cdot 0 = 0$$

Definición 3.10. *El **espacio nulo** $\operatorname{Nul} A$ de una matriz A $m \times n$, es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:*

$$\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \text{ tales que } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Es decir, el espacio nulo de una matriz es el conjunto solución del sistema lineal homogéneo asociado. También se denomina *núcleo* de A, denotándose $\ker A$.

Ejemplo 3.11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

¿ Está $\mathbf{u}$ en el espacio nulo de A, es decir, $\mathbf{u} \in \operatorname{Nul} A$?

El espacio nulo es *siempre* un subespacio vectorial, como ilustramos en el ejemplo 3.9.

Teorema 3.12. *El espacio nulo de una matriz A $m \times n$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$. Es decir, el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de n incógnitas es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Utilizando las propiedades del producto matriz-vector podemos ver que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son soluciones, es decir $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

por lo que $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y $c\mathbf{x}$ son también soluciones (es el mismo razonamiento que en el ejemplo 3.9) □

La definición de espacio nulo es una descripción *implícita*. Resolviendo el sistema homogéneo asociado obtenemos una descripción explícita del espacio nulo, y una demostración alternativa del teorema anterior. Efectivamente la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se puede escribir como (forma vectorial paramétrica)

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$$

donde los coeficientes $c_1,\ldots,c_p$ son escalares arbitrarios, entonces una descripción *explícita* del espacio nulo es

$$\operatorname{Nul} A = \operatorname{Gen}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right\}$$

por lo que es un conjunto tipo Gen. Esta es una demostración alternativa de que $\operatorname{Nul} A$ es un subespacio, según el teorema 3.6.

Ejemplo 3.13. Encontrad un conjunto generador del espacio nulo de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 13 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Se ha de encontrar la solución en forma vectorial paramétrica del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Reduciendo

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 13 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 13 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución en forma paramétrica vectorial es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - 13x_4 - 33x_5 \\ x_2 \\ 6x_4 + 15x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -33 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5$$

Por tanto, $\operatorname{Nul} A = \operatorname{Gen}\{(-2,1,0,0,0), (13,0,6,1,0), (-33,0,15,0,1)\}$.

Proposición 3.14.

1. *El conjunto generador encontrado para* $\operatorname{Nul} A$ *por el procedimiento anterior es linealmente independiente (los vectores generadores están "escalonados", la matriz que forman tiene un pivote por columna).*
2. *El número de vectores en el conjunto generador es igual al número de variables libres del sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*.*

Este resultado permite ampliar el teorema I (Teorema 1.44) cuando el espacio nulo de A es el subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$:

$$\boxed{A\ m\times n,\ \operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ no tiene solución no trivial.}}$$

Espacio columna de una matriz.

Definición 3.15. *El **espacio columna** de una matriz* A *de* $m\times n$*, denotado por* $\operatorname{Col} A$*, es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de* A*. Es decir, si* $A = \left[\ \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n\ \right]$

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

El teorema 3.6 y el hecho de que los vectores columna de una matriz $m\times n$ son vectores de $\mathbf{R}^m$, implican el siguiente teorema.

Teorema 3.16. *El espacio columna de una matriz* $m\times n$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbf{R}^m$*.*

También se puede describir el espacio columna como el conjunto de vectores $\mathbf{b}$ que resultan de aplicar A a todos los vectores $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$:

$$\operatorname{Col} A = \{\mathbf{b}\in\mathbf{R}^m\ :\ \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

o también en términos del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\operatorname{Col} A = \{\mathbf{b}\in\mathbf{R}^m\ :\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ es consistente}\}$$

Ejemplo 3.17. Encontrad una matriz A tal que $\mathscr{H} = \operatorname{Col} A$ si

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 6a-b \\ a+b \\ -7a \end{bmatrix}\ :\ a,b\in\mathbf{R} \right\}.$$

Procediendo como en el ejemplo 3.8

$$\mathscr{H} = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el espacio columna de una matriz se puede hacer una caracterización muy elegante de la existencia de solución de un sistema lineal, que es consecuencia directa de la proposición 1.26.

Proposición 3.18. *La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si el vector $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A:*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \textit{ es consistente} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$$

Este resultado permite ampliar el teorema S (Teorema 1.27) cuando las columnas de A generan *todo* el espacio $\mathbf{R}^m$:

$$\boxed{A \ m \times n, \operatorname{Col} A = \mathbf{R}^m \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ tiene solución } \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^m.}$$

Comparación entre $\operatorname{Nul} A$ y $\operatorname{Col} A$.

Ejemplo 3.19. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Si $\operatorname{Col} A$ es un subespacio de $\mathbf{R}^k$ y $\operatorname{Nul} A$ de $\mathbf{R}^l$, ¿ Cuánto son k y l ?

2. Encontrad un vector no nulo de $\operatorname{Col} A$ y otro no nulo de $\operatorname{Nul} A$.

3. Si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$:

   (a) ¿ está $\mathbf{u}$ en $\operatorname{Col} A$? ¿ está en $\operatorname{Nul} A$?

   (b) ¿ está $\mathbf{v}$ en $\operatorname{Nul} A$? ¿ está en $\operatorname{Col} A$?

3.3. Bases

Como comentamos anteriormente, los conceptos de dependencia e independencia lineal son absolutamente análogos entre vectores generales y vectores de $\mathbf{R}^n$, así que la definición 1.37 de independencia lineal es vigente para un espacio vectorial general (Hay que hacer la siguiente puntualización: una combinación lineal siempre consta de la suma de un número *finito* de vectores multiplicados por escalares)

El siguiente teorema es una versión algo más detallada y extendida a un espacio vectorial general, del teorema 1.42.

Teorema 3.20. *Un conjunto ordenado** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si algún vector* $\mathbf{v}_j$ *se puede poner como combinación lineal de los anteriores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Demostración. La demostración de que alguno de los vectores es combinación lineal de los demás es la misma que en el teorema 1.42. El sutil hecho de que podemos decir que algún vector es combinación lineal de (solamente) los anteriores, se demuestra utilizando alguna relación de dependencia

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

no trivial, con no todos los c_i nulos. Sea $c_j \neq 0$ el coeficiente no nulo de esta relación, *con mayor índice* j, Entonces $\mathbf{v}_j$ depende de los vectores anteriores:

$$\mathbf{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\mathbf{v}_{j-1}$$

□

Ejemplo 3.21. El conjunto $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$ es linealmente independiente dentro del espacio vectorial $C(\mathbf{R})$ (funciones $f(x)$ continuas $\forall x \in \mathbf{R}$) Simplemente, $\cos t$ no es múltiplo de un escalar por $\operatorname{sen} t$. Otra forma de demostrarlo, válida para otros tipos de funciones, es la siguiente: supongamos que existe una combinación lineal

$$a \operatorname{sen} t + b \cos t = 0$$

con $a, b \in \mathbf{R}$ no ambos cero. Derivando tenemos que

$$a \cos t - b \operatorname{sen} t = 0.$$

Considerando ambas ecuaciones como un sistema (lineal y homogéneo) sobre las variables a y b vemos que la matriz del sistema es

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

que es invertible (su determinante es $-1 \neq 0$), por lo que la única solución es la trivial $a = b = 0$.

El conjunto $\{\operatorname{sen} t \cos t, \operatorname{sen} 2t\}$ es linealmente dependiente. ¿ Por qué ?

*es decir, consideramos qué vector del conjunto es el primero, el segundo, etc. Si se toman los vectores en otro orden, se tiene otro conjunto ordenado. Algunos autores denominan a un conjunto ordenado, un *sistema* de vectores.

Definición 3.22 (Base de un espacio vectorial)**.** *Un conjunto ordenado de vectores $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ de un espacio vectorial $\mathscr{V}$ es una **base** de $\mathscr{V}$ si se cumple que*

1. *$\mathscr{B}$ es linealmente independiente,*
2. *$\mathscr{B}$ genera $\mathscr{V}$, es decir $\mathscr{V} = \mathrm{Gen}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$.*

Ejemplo 3.23. El teorema de la matriz invertible 2.26 (e. y h.) demuestra que las columnas de una matriz invertible $n \times n$ forman una base de $\mathbf{R}^n$.

La **base canónica** de $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de los vectores $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ canónicos:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \ \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.24. Determinad si $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ son una base de $\mathbf{R}^3$. La reducción por filas de $\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array}\right]$ demuestra que hay tres posiciones pivote, luego la matriz es invertible, luego los vectores columna forman una base. Esto suele ser más sencillo que calcular si el determinante es distinto de cero, que sería un método equivalente.

Ejemplo 3.25. En $\mathbf{R}^4$ la base

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un tipo de base de ondículas (wavelets), usadas en tratamiento de imágenes (compresión jpeg, mpeg, mp3, etc). En $\mathbf{C}^4$ la base

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se denomina base de Fourier (se usa en la transformada discreta de Fourier).

El teorema de existencia de una base de $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$**.**

Ejemplo 3.26. Sean

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}6\\16\\-5\end{bmatrix},\text{ y } \mathscr{H}=\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}.$$

Como $\mathbf{v}_3=5\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$, entonces

$$\begin{aligned}&\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}=\\&\qquad=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3\}=\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3(5\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2)\}\\&\qquad=\{(c_1+5c_3)\mathbf{v}_1+(c_2+3c_3)\mathbf{v}_2\}=\{\tilde{c}_1\mathbf{v}_1+\tilde{c}_2\mathbf{v}_2\}=\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}\end{aligned}$$

Teorema 3.27 (de existencia de una base de $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$)**.** *Sea $\mathcal{S}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ un subconjunto de $\mathscr{V}$, y $\mathscr{H}=\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$.*

1. *Si un vector $\mathbf{v}_k$ es combinación lineal de los otros vectores de $\mathcal{S}$, entonces el conjunto $\mathcal{S}-\{\mathbf{v}_k\}$ también genera $\mathscr{H}$.*
2. *Si $\mathscr{H}\neq\{\mathbf{0}\}$, algún subconjunto de $\mathcal{S}$ es base de $\mathscr{H}$.*

Demostración. Si hay algún vector $\mathbf{v}_k$ que depende de los demás vectores:

$$\mathbf{v}_k=b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}+b_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+b_p\mathbf{v}_p$$

como cualquier vector $\mathbf{v}$ de $\mathscr{H}$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k+\cdots+c_p\mathbf{v}_p\\&=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k(b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}+b_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+b_p\mathbf{v}_p)+\cdots+c_p\mathbf{v}_p\\&=(c_1+c_kb_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_{k-1}+c_kb_{k-1})\mathbf{v}_{k-1}+(c_{k+1}+c_kb_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+(c_p+c_kb_p)\mathbf{v}_p\\&=c_1'\mathbf{v}_1+\cdots+c_{k-1}'\mathbf{v}_{k-1}+c_{k+1}'\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+c_p'\mathbf{v}_p\end{aligned}$$

también $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1},\mathbf{v}_{k+1},\ldots,\mathbf{v}_p\}=\mathcal{S}-\{\mathbf{v}_k\}$.

Si el conjunto de generadores $\mathcal{S}=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ es linealmente independiente, entonces ya es una base de $\mathscr{H}$. Si es linealmente dependiente, se eliminan uno a uno vectores que dependen de los demás, hasta obtener un conjunto linealmente independiente, que sigue generando a $\mathscr{H}$, y es por tanto una base suya. □

Hicimos anteriormente un comentario (ver p. 60) sobre cómo especificar un conjunto vectorial, dando un sistema de generadores suyo. Ahora la refinamos un poco:

> la forma preferida de especificar un subespacio vectorial, si ello es posible, suele ser dar *una base* suya.

Bases de Nul A **y** Col A. Ya dimos en la sección 3.2 un procedimiento para calcular un conjunto generador de Nul A que, además, era linealmente independiente, así que es una base.

Teorema 3.28. *El conjunto de vectores* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *de la solución en forma paramétrica vectorial* $\mathbf{v}_1 c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_p \mathbf{v}_p$ *del sistema homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *es una base de* Nul A.

Las columnas pivote de una matriz escalonada U $m \times n$ generan el espacio columna de U, ya que las columnas restantes son combinaciones lineales de aquellas. Si U está en forma reducida, entonces se puede asegurar que, si hay p posiciones pivote, el espacio columna de U está generado por los p primeros vectores canónicos de $\mathbf{R}^m$.

Las relaciones de dependencia entre las columnas de una matriz A son las soluciones no triviales del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como al realizar operaciones elementales de fila sobre una matriz A, no varía el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ni el significado u orden de las variables x_i, es cierta la siguiente proposición.

Proposición 3.29. *Las operaciones elementales de fila no varían las relaciones de dependencia lineal entre columnas.*

Este resultado implica inmediatamente el siguiente terorema.

Teorema 3.30. *Las columnas* pivote *de A son una base de* Col A.

Ejemplo 3.31. Dar una base del espacio columna de

$$A = \left[\, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Una matriz escalonada equivalente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas pivote han sido la primera, tercera y quinta, luego

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \text{ es una base de } \operatorname{Col} A.$$

Ampliación de una base. El teorema fundamental de estructura de espacios vectoriales es

Teorema 3.32. *En todo espacio vectorial:*

1. *todo sistema de generadores puede reducirse a una base*
2. *todo conjunto linealmente independiente puede extenderse a una base*
3. *siempre existe una base.*

Demostración. En este momento sólo podemos demostrar este teorema para $\mathbf{R}^n$. La existencia de la base canónica demuestra el punto 3. y el teorema 3.27 demuestra 1. El punto 2. se denomina *ampliación* hasta una base de un conjunto de vectores linealmente independiente. Se demuestra añadiendo vectores linealmente independientes respecto al conjunto linealmente independiente que se tiene, hasta obtener un conjunto que genera todo el espacio. En $\mathbf{R}^n$ este proceso de ampliación debe terminar, ya que a partir de $n+1$ vectores el conjunto sería linealmente dependiente (teorema 1.43) luego el vector $n+1$ (como máximo) que añadimos es, según el teorema 1.42, siempre combinación lineal de los anteriores. Como este vector es arbitrario, todo $\mathbf{R}^n$ es generado por el conjunto linealmente independiente. □

Veremos en la siguiente sección cómo podemos demostrar este teorema para un espacio vectorial más general, usando una identificación entre el espacio vectorial y un espacio $\mathbf{R}^n$.

El teorema 3.32 implica que, en cierto modo, una base es un conjunto generador lo más pequeño posible en número, y también un conjunto de vectores linealmente independiente con el mayor número posible de vectores.

Ejemplo 3.33.

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\right\}.$$

El primer conjunto es linealmente independiente, pero no genera $\mathbf{R}^3$. El segundo es una base de $\mathbf{R}^3$. El tercero genera $\mathbf{R}^3$, pero no es linealmente independiente.

3.4. Sistemas de coordenadas

La relación entre bases y sistemas de coordenadas se fundamenta en el siguiente resultado.

Teorema 3.34 (Representación única)**.** *Sea $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$* una base de un espacio vectorial $\mathscr{V}$. Todo vector $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ se puede expresar de forma única como combinación lineal*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n. \tag{3.2}$$

Demostración. Existen escalares $c_1,\dots,c_n$ tales que (3.2) es válida para todo $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, ya que $\mathscr{B}$ genera todo $\mathscr{V}$. Supongamos entonces que no son únicos, es decir, que existen $d_1,\dots, d_n$ tales que

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_n\mathbf{b}_n.$$

Restando ambas expresiones para $\mathbf{v}$ tenemos que

$$\mathbf{0} = (c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \ldots + (c_n - d_n)\mathbf{b}_n.$$

Pero al ser $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ base, es un conjunto linealmente independiente, y la única combinación lineal nula es la que tiene coeficientes nulos, es decir $c_1 = d_1$, $\dots$, $c_n = d_n$. □

Definición 3.35. *Sea $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base de un espacio vectorial $\mathscr{V}$. Las **coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base** $\mathscr{B}$ son los escalares $c_1,\dots,c_n$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$.*

Las coordenadas permiten relacionar cualquier espacio vectorial (que tenga una base finita de n vectores) con un espacio $\mathbf{R}^n$. Efectivamente, a cualquier

*observad que la base es *finita*, es decir, contiene un número *finito* de vectores vector $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ se le puede asociar un **vector de coordenadas** $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ respecto a la base $\mathscr{B}$:

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \text{si } \mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n.$$

Coordenadas en $\mathbf{R}^n$. En $\mathbf{R}^n$ disponemos de la base canónica $\mathscr{E}$. Es sencillo interpretar las coordenadas de un vector en términos de proyecciones sobre los ejes del espacio cartesiano correspondiente, como se hacía en el Bachillerato. En la figura 3.2 ilustramos esta interpretación geométrica en el caso de $\mathbf{R}^2$.

Ejemplo 3.36. Sea $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base de $\mathbf{R}^2$, siendo $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontrad $\mathbf{x}$ sabiendo que $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.37. Dado el vector de $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$, los números 1 y 6 son las coordenadas respecto a la base estándar $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2.$$

Ejemplo 3.38. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Si las coordenadas $\mathbf{x}$ en la base $\mathscr{B}$ son $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, para hallarlas hay que plantear $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$

$$c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

que es un sistema de ecuaciones de solución $c_1 = 3$, $c_2 = 2$. Una interpretación geométrica se da en la figura 3.2.

La matriz de ejemplo 3.38 cambia las coordenadas de $\mathbf{x}$ de la base $\mathscr{B}$ a la base canónica:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

y se denomina **matriz de cambio de coordenadas** de $\mathscr{B}$ a la base canónica $\mathscr{E}$.

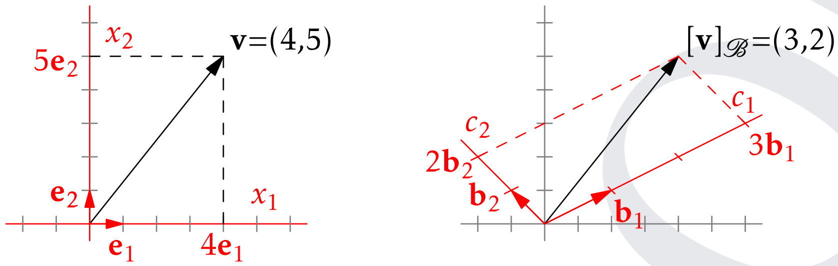

Figura 3.2: El vector $(4,5)$ y sus coordenadas (x_1,x_2) en la base canónica y (c_1,c_2) en la base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\} = \{(-1,1),(2,1)\}$.

Definición 3.39. *En general, si tenemos una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ de $\mathbf{R}^n$, la matriz del cambio de coordenadas es aquella cuyas columnas son los vectores de $\mathscr{B}$ escritos en la base canónica:*

$$P_{\mathscr{B}} = \left[\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\right]$$

y la ecuación $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$ se escribe en forma matricial

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = P_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

($P_{\mathscr{B}}$ “pasa” coordenades en $\mathscr{B}$ a coordenadas en $\mathscr{E}$)

Las columnas de $P_{\mathscr{B}}$ forman una base de $\mathbf{R}^n$, y el teorema de la matriz invertible (teorema 2.26 e. ó h.) implica que $P_{\mathscr{B}}$ es invertible. Podemos decir entonces que $P_{\mathscr{B}}^{-1}$, que actúa como

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$$

es la matriz del cambio de coordenadas de la base canónica a la base $\mathscr{B}$.

Ejemplo 3.40. Siguiendo con el ejemplo 3.38, en el que

$$P_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tenemos que la matriz inversa es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica a la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

¿ Cuál es la interpretación geométrica de las columnas de esta matriz ?

Ejercicio 3.41. Con

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- determinad si $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathscr{H} = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$;
- comprobad que $\mathbf{x} \in \mathscr{H}$;
- y calculad las coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$. Observad que son solo dos coordenadas, a pesar de que $\mathbf{x}$ es un vector de $\mathbf{R}^3$.

3.4.1. La aplicación de coordenadas

Es importante interpretar *funcionalmente* la relación

$$\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$$

Es decir, las coordenadas definen una función (o aplicación) que toma como argumentos vectores de un espacio vectorial $\mathscr{V}$ y devuelve valores $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ de $\mathbf{R}^n$. Esta función, denominada aplicación de coordenadas, es **uno a uno**, es decir a todos los vectores $\mathbf{v}$ les corresponde un vector de $\mathbf{R}^n$, y sólo uno (esto es lo que dice el teorema de representación unica 3.34) Pero además es lo que se denomina una *aplicación lineal*, es decir

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{u}]_{\mathscr{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} \quad \text{y} \quad c\mathbf{v} \mapsto c[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$$

Es decir, las coordenadas de la suma son la suma de las coordenadas, y las de un vector escalado son las escaladas de las originales coordenadas.

Demostración. Sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + \cdots + u_n\mathbf{b}_n$ y $\mathbf{y} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n$ dos vectores escritos en términos de una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathscr{V}$. Sea c un escalar. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= u_1\mathbf{b}_1 + \cdots + u_n\mathbf{b}_n + v_1\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n \\ &= (u_1 + v_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (u_n + v_n)\mathbf{b}_n \end{aligned}$$

$$c\mathbf{v} = c(v_1\mathbf{b}_1 + \cdots + v_n\mathbf{b}_n) = cv_1\mathbf{b}_1 + \cdots + cv_n\mathbf{b}_n$$

□

Una aplicación uno a uno que es lineal se denomina **isomorfismo**, porque identifica sus espacios dominio y codominio, elemento a elemento, y toda la estructura lineal de ambos conjuntos: si hay una relación de dependencia en el espacio dominio, la misma relación de dependencia existe entre las imágenes en el espacio codominio. Se dice que los espacios son **isomorfos** y que son manifestaciones del mismo *espacio vectorial abstracto*. Por ejemplo, un plano en el espacio que pasa por el origen (ver el ejemplo 3.8 y la figura 3.1, o el ejercicio 3.41) *no es* $\mathbf{R}^2$, pero sí *es isomorfo* s $\mathbf{R}^2$.

Ejemplo 3.42. La base canónica del espacio $\mathbf{P}_3$ de polinomios de hasta tercer grado

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \tag{3.3}$$

es (Ejemplo 3.43) $\mathscr{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$. El polinomio (3.3) tiene como coordenadas en esa base:

$$[\mathbf{p}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

La función de coordenadas $\mathbf{p} \mapsto [\mathbf{p}]_{\mathscr{E}}$

Ejemplo 3.43. El espacio $\mathbf{P}_3$ de polinomios de hasta tercer grado tiene una base, que denominamos canónica, igual a $\mathscr{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Es decir, un polinomio de $\mathbf{P}_3$

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

tiene como coordenadas en esa base:

$$[\mathbf{p}]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

La aplicación de coordenadas en este caso es $\mathbf{p} \mapsto [\mathbf{p}]_{\mathscr{E}}$ que va de $\mathbf{P}_3$ a $\mathbf{R}^4$. Es un isomorfismo, y permite identificar totalmente el espacio de polinomios de grado hasta 3, con $\mathbf{R}^4$, diciéndose que $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{R}^4$ son espacios **isomorfos**. Realmente, todas las operaciones entre polinomios de orden hasta tres se pueden codificar usando solo los vectores de coeficientes (a_0, a_1, a_2, a_3). Discutiremos algo más el concepto de isomorfismo en la sección 4.6.

Resumiendo,

La aplicación de coordenadas es un isomorfismo que permite identificar un espacio vectorial con una base finita con el espacio de vectores $\mathbf{R}^n$

La demostración del teorema 3.32 del capítulo anterior era válida solo para espacios $\mathbf{R}^n$. Pero a través del isomorfismo de coordenadas, el teorema es válido para cualquier espacio vectorial con base finita. De hecho

Proposición 3.44. *Cualquier resultado o teorema válido para $\mathbf{R}^n$ es válido para un espacio vectorial con una base de n vectores, ya que este es isomorfo a $\mathbf{R}^n$*

Ejemplo 3.45. Usando vectores de coordenadas, comprobemos que los polinomios

$$2t - t^2, \quad 2 + 2t, \quad 6 + 16t - 5t^2$$

son linealmente dependientes en $\mathbf{P}_2$. La aplicación de coordenadas $\mathbf{P}_2 \to \mathbf{R}^3$ identifica los polinomios como

$$2t - t^2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad 2 + 2t \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 6 + 16t - 5t^2 \mapsto \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Veamos si los tres vectores anteriores son linealmente dependientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 16 \\ -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No hay un pivote en cada columna, luego los vectores son dependientes. De hecho, estos vectores de $\mathbf{R}^3$ son los del ejemplo 3.26, luego $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ y deducimos que (yendo para atrás en isomorfismo, identificando vectores de $\mathbf{R}^3$ con polinomios)

$$6 + 16t - 5t^2 = 5(2t - t^2) + 3(2 + 2t)$$

Ejercicio 3.46. Usando vectores de coordenadas, comprobad que los polinomios

$$1 + 2t^2, \quad 4 + t + 5t^2, \quad 3 + 2t$$

son linealmente dependientes en $\mathbf{P}_3$ (atención al subíndice 3)

3.5. Dimensión de un espacio vectorial

Un espacio vectorial puede tener muchas bases. Pero resulta que todas ellas tienen el mismo número de vectores.

Teorema 3.47. *Si un espacio vectorial $\mathscr{V}$ tiene una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, cualquier conjunto que contenga más de n vectores es linealmente dependiente.*

Demostración. Los vectores del conjunto en coordenadas son $[\mathbf{v}_j]_{\mathscr{B}}$, $j = 1, \ldots, p$, es decir p vectores que tienen n componentes. El teorema 1.43 demuestra que, como hay más vectores que componentes, el conjunto de vectores $[\mathbf{v}_j]_{\mathscr{B}}$ de $\mathbf{R}^n$ es linealmente dependiente. Entonces hay una relación de dependencia entre ellos, y el isomorfismo $[\mathbf{v}_j]_{\mathscr{B}} \leftrightarrow \mathbf{v}_j$ implica que entre los vectores $\mathbf{v}_j$ existe la misma relación de dependencia, por lo que el conjunto de vectores de $\mathscr{V}$ es linealmente dependiente. $\square$

Teorema 3.48. *Si un espacio vectorial tiene una base con un número finito de vectores n, entonces todas las bases tienen n vectores.*

Demostración. Si hubiera dos bases con un número distinto de vectores, la que tuviera más vectores sería, por el teorema 3.47, linealmente dependiente, por lo que no sería base. □

Definición 3.49. *Un espacio vectorial $\mathscr{V}$ que tiene una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots \mathbf{b}_n\}$ con un número finito de vectores se denomina espacio de **dimensión finita**. El número n de vectores de cualquier base suya es la **dimensión** del espacio:*

$$\dim \mathscr{V} = n.$$

*La dimensión del espacio vectorial nulo $\{\mathbf{0}\}$ se define como cero. Si $\mathscr{V}$ no tiene una base finita, se dice que tiene **dimensión infinita**.*

Todo subsepacio es un espacio vectorial, así que es legítimo preguntarse cuál es la dimensión de un subespacio.

Ejemplo 3.50. Encontrad la dimensión del subespacio

$$\mathscr{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

Este subespacio es $\operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ con

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Es evidente que $\mathbf{v}_3$ es combinación lineal de los otros vectores (es $-2\mathbf{v}_2$) por lo que se puede eliminar del conjunto de generadores, $\mathscr{H} = \operatorname{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. También es evidente, por la disposición escalonada de los elementos no nulos de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4$, que estos forman un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto son base de $\mathscr{H}$. Son tres, por lo que la dimensión de $\mathscr{H}$ es 3.

Dimensiones de subespacios

Teorema 3.51. *Si $\mathscr{H} \subset \mathscr{V}$ es un subespacio de un espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión finita, entonces*

1. *La dimensión de $\mathscr{H}$ es finita, y es menor o igual que la de $\mathscr{V}$:*

$$\dim \mathscr{H} \leq \dim \mathscr{V}.$$

2. *Cualquier base de $\mathscr{H}$ puede ampliarse para construir una base de $\mathscr{V}$.*

Demostración. Si $\mathscr{H}$ tuviera una base de más de n vectores, habría más de n vectores linealmente independientes en $\mathscr{V}$, contradiciendo al teorema 3.47. El teorema 3.32 en su versión para espacios generales de dimensión finita (proposicion 3.44) permite ampliar la base de $\mathscr{H}$, que es un conjunto linealmente independiente, a una base de $\mathscr{V}$. □

La segunda parte del teorema anterior asegura que existe lo que se denomina una base de $\mathscr{V}$ *adaptada* al subespacio $\mathscr{H}$.

Ejemplo 3.52. En el ejemplo 3.50 el conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ es una base del subespacio tridimensional $\mathscr{H}$ de $\mathbf{R}^4$. Podemos ampliar esta base añadiendo un vector que no sea linealmente dependiente de los anteriores. Si añadimos, por ejemplo, $\mathbf{v}_5 = (1,0,0,0)$, la matriz formada por $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

que tiene pivotes en cada columna, por lo que las columnas son un conjunto linealmente independiente que genera $\mathbf{R}^4$, es decir, una base de $\mathbf{R}^4$. A este tipo de base, que se suele reorganizar escribiéndola como $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, se la denomina *base de $\mathscr{V}$ adaptada a $\mathscr{H}$*, porque sus primeros vectores son una base de $\mathscr{H}$ y los restantes la amplían hasta ser base de todo $\mathscr{V}$.

Teorema 3.53. *Si $\mathscr{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$, entonces*

- *Cualquier conjunto linealmente independiente de n vectores es una base.*
- *Cualquier conjunto generador de $\mathscr{V}$ de n vectores es una base.*

Demostración. La primera afirmación la demuestra de nuevo el teorema 3.47, ya que cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ ha de ser combinación lineal de los n dados, porque el conjunto formado por los n vectores del conjunto linealmente independiente mas el vector $\mathbf{v}$ ha de ser dependiente, teniendo que entrar $\mathbf{v}$ en las relaciones de dependencia. Tampoco puede un conjunto generador de $\mathscr{V}$ de n vectores ser dependiente, ya que eliminando los vectores dependientes podríamos extraer una base de menos de n vectores.

En términos de coordenadas, los vectores coordenados asociados a los n vectores de $\mathscr{V}$ son de $\mathbf{R}^n$, tienen n componentes. La matriz que forman es de $n \times n$, cuadrada, y si los vectores son independientes hay n columnas con pivote, luego hay n filas con pivote y las columnas generan $\mathbf{R}^n$. Viceversa, si son conjunto generador hay n filas con pivote y por tanto n columnas con pivote, por lo que los vectores son independientes. □

Finalmente, damos un resultado que relaciona las dimensiones del espacio columna y el espacio nulo de una matriz, directamente demostrable de los teoremas 3.30 y 3.28.

Teorema 3.54. *Sea A una matriz $m \times n$.*

1. *La dimensión de* $\operatorname{Col} A$ *es el número de columnas pivote de A.*
2. *La dimensión de* $\operatorname{Nul} A$ *es el número de variables libres en $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Por tanto, la suma de ambas será el número total de variables en el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n. \tag{3.4}$$

Ejemplo 3.55. Encontrad $\dim \operatorname{Col} A$ y $\dim \operatorname{Nul} A$ si

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.6. Rango

Se da el hecho misterioso de que el número de *filas* de una matriz linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes. Veamos por qué.

El espacio fila. Cada fila de una matriz A de $m \times n$ se puede identificar con un vector de n componentes, es decir, de $\mathbf{R}^n$. El **espacio fila** $\operatorname{Fil} A$ es el subespacio de $\mathbf{R}^n$ generado por esos vectores.

Teorema 3.56. *Las operaciones elementales de fila no alteran el espacio fila de una matriz. Por tanto, una base del espacio fila de una matriz A la constituyen las filas no nulas de una matriz escalonada U equivalente por filas a A.*

Demostración. Las filas de U son combinaciones lineales de las de A, por lo que el espacio fila de U está incluido en el de A. Pero al ser invertibles las operaciones elementales, también las filas de A son combinaciones lineales de las de U, así que el espacio fila de A está incluido en el de U. Luego son iguales. La estructura escalonada de las filas no nulas de U implica que son linealmente independientes, y generan el espacio fila, así que son una base. □

Ejemplo 3.57. Encontrad las dimensiones y correspondientes bases del espacio fila, columna y nulo de

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como una posible matriz escalonada es

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim \operatorname{Fil} A = 3$, $\dim \operatorname{Col} A = 3$ y $\dim \operatorname{Nul} A = 5 - 3 = 2$. Las tres primeras filas de U son base de $\operatorname{Fil} A$, y las columnas pivote de A son base del espacio columna:

$$\text{base de } \operatorname{Fil} A\text{: } \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \end{bmatrix} \right\};$$

$$\text{base de } \operatorname{Col} A\text{: } \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matriz escalonada U ha bastado para calcular el espacio fila y columna, pero para calcular el nulo tendremos que encontrar la matriz escalonada reducida $\mathscr{V}$ o hacer sustitución progresiva:

$$\mathscr{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 = 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & & & + & 3x_5 = 0 \\ & & & & & & x_4 & - & 5x_5 = 0 \end{array}$$

que implica que

$$\text{una base de } \operatorname{Nul} A\text{:} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Teorema del rango

Teorema 3.58 (Teorema del rango)**.** *Las dimensiones del espacio fila y columna de una matriz $m \times n$ son iguales, y se denominan **rango** de A. El rango es también igual al número de posiciones pivote de A, y se satisface que*

$$\operatorname{rango} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$$

Demostración. El número de columnas pivote de A es la dimensión del espacio columna de A (ver el teorema 3.30). Pero ese número es el mismo que el de columnas pivote de una forma escalonada U de A. Y en una forma escalonada, ese también es el número de filas distintas de cero. Por tanto, es también la dimensión del espacio fila de U y, por tanto, de A. La fórmula (3.4) es equivalente a la dada aquí. □

Un resultado clásico es el teorema del Rouché-Frobenius para sistemas lineales

Teorema 3.59 (Rouché-Frobenius)**.** *Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es igual al rango de la matriz aumentada, el sistema es consistente:*

$$\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} \left[\, A \mid \mathbf{b} \,\right] \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \textit{ es consistente}$$

La explicación es que el rango no varía al añadir la columna $\mathbf{b}$ si y sólo si $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A, lo que equivale (teorema 1.26) a que el sistema sea consistente.

El teorema del rango pone al descubierto ciertas restricciones sobre la dimensión del subespacio nulo de una matriz. Si $n > m$, el espacio nulo de A de $m \times n$ ha de ser de dimensión al menos la diferencia $n - m$. Veremos en capítulos posteriores más interpretaciones y ampliaciones del teorema del rango, hasta llegar a un resultado que G. Strang denomina *el teorema fundamental del álgebra lineal* por su importancia.

3.7. Cambio de base

En la sección 3.4 estudiamos cómo, dada una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbf{R}^n$, la matriz de coordenadas $P_{\mathscr{B}} = \left[\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\right]$ permite pasar de coordenadas en esa base a coordenadas en la base canónica mediante la operación $[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = P_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$. En algunas aplicaciones es necesario determinar las coordenadas de vectores de un espacio vectorial respecto a más de una base. Por ejemplo, si tenemos dos bases $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ de un espacio vectorial $\mathscr{V}$ (no necesariamente $\mathbf{R}^n$) los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ y $[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}}$ de un vector dado $\mathbf{v}$ son muy diferentes. Sin embargo, se puede encontrar una relación general entre las coordenadas en diferentes bases.

Ejemplo 3.60. Si $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ son dos bases de un espacio vectorial, cuyos vectores están relacionados por

$$\mathbf{b}_1 = 4\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = -6\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2.$$

Si suponemos que $\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, es decir, $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, encontrar las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a $\mathscr{C}$ es fácil:

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = 3(4\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) + (-6\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = 6\mathbf{c}_1 + 4\mathbf{c}_2 \qquad (3.5)$$

luego $[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$. Alternativamente, podemos utilizar la aplicación de coordenadas y ver que

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = [3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}} = 3[\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} + [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}}.$$

La combinación lineal de vectores anterior (igual a la de (3.5)) se puede escribir en forma matricial como

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}} \,\right]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}} \,\right][\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$$

En nuestro caso concreto

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.61. *Sean $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ y $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial $\mathscr{V}$. Entonces existe una única matriz $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ de $n \times n$ tal que*

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}.$$

Esa matriz es la formada por columnas que son los vectores de la base $\mathscr{B}$ escritos en coordenadas de la base $\mathscr{C}$:

$$P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{C}} \,\right].$$

La matriz $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ se denomina **matriz de cambio de coordenadas de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$.** Esta matriz es invertible, porque es cuadrada y sus columnas son una base, así que forman un conjunto linealmente independiente. Su inversa es, evidentemente, la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathscr{C}$ a la base $\mathscr{B}$:

$$P^{-1}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}}.$$

Cambio de base en $\mathbf{R}^n$. En $\mathbf{R}^n$ contamos con la base canónica $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ y, cuando no se indica lo contrario, los vectores están dados en términos de esta base: hemos escrito siempre $\mathbf{x}$ que es en realidad $[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$. Por ejemplo, si conocemos una nueva base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, los vectores $\mathbf{b}_i$ están dados con coordenadas canónicas, con lo cual la matriz cuyas columnas son estos vectores, $P_{\mathscr{B}}$ en la sección 3.4 es la matriz de cambio de coordenadas en la base $\mathscr{B}$ a las coordenadas en la canónica:

$$P_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{E}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{E}} \,\right] = \left[\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\right].$$

Es interesante el caso en que es necesario calcular el cambio de coordenadas entre dos bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ dadas con respecto a la base canónica. Usando como paso intermedio la base canónica, podemos comprender que

$$P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{E}}P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = P^{-1}_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{C}}P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}.$$

Ejemplo 3.62.

Sean $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ dos bases de $\mathbf{R}^2$, con $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. Para calcular el cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{C}$ se puede construir una matriz aumentada

$$\left[\, \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \parallel \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \,\right] = \left[\, P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{C}} \parallel P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} \,\right]$$

y reducirla hasta que el lado izquierdo sea la identidad, con lo que el lado derecho será la matriz buscada:

$$\left[\, P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{C}} \parallel P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} \,\right] \sim \left[\, I \parallel P^{-1}_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{C}} P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} \,\right] \sim \left[\, I \parallel P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} \,\right].$$

En nuestro caso

$$\left[\, \mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \parallel \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \,\right] = \left[\begin{array}{rr||rr} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr||rr} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

es decir

$$P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si ahora quisiéramos encontrar la matriz del cambio de coordenadas podríamos invertir

$$P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}} = P^{-1}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.8. Respuestas a los ejercicios

3.9. Resumen

Proposición (Criterio de subespacio vectorial). *$\mathscr{H}$ es un subespacio vectorial si se cumple que*

1. $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathscr{H} \Rightarrow \mathbf{v}+\mathbf{w} \in \mathscr{H}$;
2. $\forall c \in \mathbf{R}$ *y* $\forall \mathbf{v} \in \mathscr{H} \Rightarrow c\mathbf{v} \in \mathscr{H}$.

Teorema. *El espacio* $\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$, $\mathbf{v}_i \in \mathscr{V}$, *es un subespacio vectorial de* $\mathscr{V}$.

Definición. *El* ***espacio nulo*** $\mathrm{Nul}\,A$:

$$\mathrm{Nul}\,A = \{\mathbf{x} \textit{ tales que } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

El ***espacio columna*** $\mathrm{Col}\,A$:

$$\mathrm{Col}\,A = \{\mathbf{b} \textit{ tales que } \mathbf{b} = A\mathbf{x}\}$$

Si $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ *también*

$$\mathrm{Col}\,A = \mathrm{Gen}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$$

Definición (Base). $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_p\} \subset \mathscr{V}$ *es una base de* $\mathscr{V}$ *si*

1. $\mathscr{B}$ *es linealmente independiente,*
2. $\mathscr{B}$ *genera* $\mathscr{V}$: $\mathscr{V} = \mathrm{Gen}\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_p\}$.

Teorema. *Si* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ *es la solución en forma paramétriac vectorial de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *el conjunto* $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ *es una base de* $\mathrm{Nul}\,A$.
Las columnas pivote *de A son una base de* $\mathrm{Col}\,A$.

Teorema. *Si un espacio vectorial tiene una base de* $n \in \mathbf{N}$ *vectores, todas sus bases tienen n vectores y se define la dimensión* $\dim \mathscr{V} = n$.

Teorema. *En todo espacio vectorial:*

1. *todo sistema de generadores puede reducirse a una base*
2. *todo conjunto linealmente independiente puede extenderse a una base*
3. *siempre existe una base.*

Teorema. *Si* $\mathscr{H} \subset \mathscr{V}$ *es un subespacio de un espacio vectorial* $\mathscr{V}$ *de dimensión finita, entonces*

- $\dim \mathscr{H} \leq \dim \mathscr{V}$.
- *Cualquier base de* $\mathscr{H}$ *puede ampliarse a una base de* $\mathscr{V}$.

Teorema. *Si* $\mathscr{V}$ *es un espacio vectorial de dimensión finita* $p \geq 1$, *entonces*

- *Todo conjunto linealmente independiente de p vectores es una base.*
- *Todo conjunto generador de* $\mathscr{V}$ *de p vectores es una base.*

Teorema. *Sea A una matriz* $m \times n$.

1. *La dimensión de* $\mathrm{Col}\,A$ *es el número de columnas pivote de A.*
2. *La dimensión de* $\mathrm{Nul}\,A$ *es el número de variables libres en* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por tanto, la suma de ambas será el número total de variables en el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\dim \mathrm{Col}\,A + \dim \mathrm{Nul}\,A = n.$$

Teorema. *Las operaciones elementales de fila no alteran el espacio fila de una matriz. Por tanto, una base del espacio fila de una matriz A la constituyen las filas no nulas de una matriz escalonada U equivalente por filas a A.*

Teorema (Teorema del rango)**.** *Las dimensiones del espacio fila y columna de una matriz $m \times n$ son iguales, y se denominan **rango** de A. El rango es también igual al número de posiciones pivote de A, y se satisface que*

$$\operatorname{rango} A + \dim \operatorname{Nul} A = n.$$

Teorema (Representación única)**.** *Si $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base de $\mathscr{V}$, todo vector $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ se puede expresar de forma única como combinación lineal*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

y $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = (c_1, \ldots, c_n)$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base $\mathscr{B}$.

Definición. *Si $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es una base de $\mathbf{R}^n$, la matriz del cambio de coordenadas es*

$$P_{\mathscr{B}} = \left[\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\right]$$

y la ecuación $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots \mathbf{b}_n$ se escribe en forma matricial

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = P_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

($P_{\mathscr{B}}$ “pasa” coordenades en $\mathscr{B}$ a coordenadas en $\mathscr{E}$)

Teorema. *Sean $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ y $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ dos bases de un espacio vectorial $\mathscr{V}$. Entonces existe una única matriz $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ de $n \times n$ tal que*

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}.$$

Esa matriz es la formada por columnas que son los vectores de la base $\mathscr{B}$ escritos en coordenadas de la base $\mathscr{C}$:

$$P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \left[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{C}} \,\right].$$

($P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ “pasa” coordenades en $\mathscr{B}$ a coordenadas en $\mathscr{C}$)

La matriz de cambio de bases entre dos bases $\mathscr{B} = \{[\mathbf{b}_1]_{\mathscr{E}}, \ldots, [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{E}}\}$ y $\mathscr{C} = \{[\mathbf{c}_1]_{\mathscr{E}}, \ldots, [\mathbf{c}_n]_{\mathscr{E}}\}$ de $\mathbf{R}^n$ cuyos vectores están dados en la base canónica es

$$P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{E}} P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{C}}^{-1} P_{\mathscr{B}}\,.$$