Problema 7. Un haz de átomos de spin 1/2 atraviesa una serie sucesiva de Stern-Gerlach,del siguiente modo:
(a) La primera medida deja pasar los átomos con $S_z = \hbar/2$ y rechaza los átomos con $S_z = -\hbar/2$.
(b) La segunda medida selecciona átomos con $S_n = \hbar/2$ y rechaza átomos con $S_n = -\hbar/2$, donde Sn es el autovalor del operador $S\cdot\hat{n}$, con $\hat{n}$ en el plano xz formando un ángulo β con respecto al eje z.
(c) La tercera medida deja pasar átomos con $S_z = -\hbar/2$ y bloquea átomos con $S_z = \hbar/2$
¿Cuál es la intensidad final del haz con $S_z = -\hbar/2$ cuando el haz con $S_z = \hbar/2$ que ha sobrevivido a la primera medida está normalizado a la unidad?
¿Cómo debemos orientar el segundo Stern-Gerlach si queremos maximizar la intensidad del último haz, el haz con $S_z = -\hbar/2$?

Solución:

Luego de atravesar el haz el primer Stern-Gerlach, el sistema se encuentra en un estado $|S_z;+\rangle \equiv |+\rangle$ ya está normalizado, éste será nuestro estado de partida. Los sucesivos pasos por los distintos Stern-Gerlach los podemos representar del siguiente modo:
paso por el 1er SG(estado inicial)$|\rightarrow i\rangle = |+\rangle \longrightarrow$ pasa por el 2do SG $\longrightarrow |S\cdot\hat{n};+\rangle \longrightarrow$ 3er Stern-Gerlach $\longrightarrow |S_z;-\rangle \equiv |-\rangle$.

Con lo cual tenemos un estado final $|S_z;-\rangle \equiv |-\rangle$.

Sabemos que (ejercicio 3):

$$|S\cdot\hat{n};+\rangle = \cos(\frac{\beta}{2})|+\rangle + \sin(\frac{\beta}{2})e^{i\alpha}|-\rangle \qquad (1)$$

Donde recordemos que:
$\hat{n}$= (cosαsenβ,senαsenβ,cosβ) en el plano xyz.
$S = (S_x, S_y, S_z)$
Las S_j expresadas en las matrices de Pauli.

Pero por dato del enunciado para la segunda medición en el plano xz de lo cual $\alpha = 0,\pi$. Con lo cual (1) nos queda:

$$|S\cdot\hat{n};+\rangle = \cos(\frac{\beta}{2})|+\rangle + \sin(\frac{\beta}{2})|-\rangle$$

Intensidad del haz de salida final. Tenemos medidas independientes por lo cual las probabilidades son independientes la intensidad del haz final en este caso nos queda:

$P(|+\rangle | S\cdot\hat{n};+\rangle) P(|S.\hat{n},+\rangle | -\rangle) = |\langle - | S\cdot\hat{n};+\rangle\langle S\cdot\hat{n};+|+\rangle|^2$

$= \sin^2(\frac{\beta}{2})\cos^2(\frac{\beta}{2})$

La intensidad tiene un valor máximo para $\beta = \pm\pi/2$, pues al formar el segundo Stern-Gerlach un ángulo perpendicular con el eje z, no tiene ninguna preferencia sobre ninguna de las orientaciones, $|+\rangle$ ó $|-\rangle$.