

Física Teórica 2 - Guía 1_Dimensión 2.

Isabel Fuertes Vila

28 de Marzo de 2023

Problema 12. Sea un haz con N fotones por segundo descritos por el siguiente estado de polarización: $|\psi\rangle = c(3|x\rangle + 4i|y\rangle)$.

(a) ¿Cuánto debe valer la constante c para que el estado esté apropiadamente normalizado?

(b) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador y ?

(c) ¿Qué fracción de los fotones pasarán en promedio por un polarizador x' (orientado en un ángulo θ respecto a x)?

(d) Cuando un fotón está polarizado en R lleva un momento angular \hbar respecto de su dirección de movimiento. Si su polarización es L posee el mismo momento angular, pero orientado en la dirección opuesta. Si el haz descrito por el estado ψ es absorbido totalmente por una superficie, ¿qué torque se ejercerá sobre la misma?

(e) ¿Qué se observa cuando se envía un solo fotón y éste es absorbido por la superficie (suponiendo que tiene un instrumento suficientemente delicado para medirlo)?

Solución

(a) Nos piden hallar la constante c para que el estado

$$|\psi\rangle = c(3|x\rangle + 4i|y\rangle), \quad (1)$$

esté apropiadamente normalizado. Esto quiere decir que tenemos que encontrar c tal que se verifique la condición de normalización

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Como en el problema no lo explicita, por simplicidad y para poder hacer las cuentas de los siguientes items consideramos el valor c constante real.

Entonces, para resolver aplicamos propiedades de ortonormalización de los estados de la base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$:

$$\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$$

$$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$$

Ahora sí, desarrollamos $\langle\psi|\psi\rangle$ y multiplicamos cada término correspondiente de la siguiente manera:

Física Teórica 2 - Guía 1_Dimensión 2.

Isabel Fuertes Vila

28 de Marzo de 2023

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = c(3\langle x | -4i\langle y |) c(3|x\rangle + 4i|y\rangle) = c^2(9\langle x | x \rangle + 12i\langle x | y \rangle - 12i\langle y | x \rangle + 16\langle y | y \rangle) = c^2(9 + 16) = c^2(25) \Rightarrow c = 1/5.$$

Luego, el estado de polarización del haz de fotones (1) resulta:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{3}{5}|x\rangle + \frac{4}{5}i|y\rangle\right) \quad (2)$$

(b) La fracción de fotones que pasan en promedio por el polarizador está asociada a su probabilidad:

$$P(\psi|y) = |\langle y | \psi \rangle|^2 = \left|\frac{4i}{5}\right|^2 = \frac{16}{25}.$$

(c) En este caso tenemos un polarizador que forma un ángulo con el eje x , es decir con polarización circular: $|x'\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$. La fracción de fotones en promedio que pasa por $|x'\rangle$ es:

$$P(\psi|y) = |\langle x' | \psi \rangle|^2 = |(\cos\theta\langle x | + \sin\theta\langle y |) \left(\frac{1}{5}(3|x\rangle + 4i|y\rangle)\right)|^2 = \frac{9}{25}(1 + \frac{7}{9}\sin^2\theta)$$

(d) Recordemos los siguientes estados de polarización:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle),$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle).$$

Definimos el torque τ como el incremento del impulso angular por el intervalo del tiempo Δt que tardan los fotones en hacer impacto sobre la superficie de un material:

$$\tau = \frac{\Delta L_z}{\Delta t}. \quad (3)$$

Pero en nuestro problema nos dicen que según su estado de polarización R o L , lleva un momento \hbar o $-\hbar$ correspondiente, es decir que de este dato sabemos que tenemos dos resultados posibles de una medición, con lo cual vamos a trabajar con el momento angular promedio. Entonces, para encontrar el valor de la media primero necesitamos calcular la fracción de fotones que pasan por

Física Teórica 2 - Guía 1_Dimensión 2.

Isabel Fuertes Vila

28 de Marzo de 2023

cada polarizador. Suponemos que la dirección de incidencia del haz en Z:

$$P(L_z = \hbar) = |\langle R | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | -i \langle y |) \left(\frac{1}{5} (3|x\rangle + 4i|y\rangle) \right) \right|^2 = \frac{49}{50}.$$

$$P(L_z = -\hbar) = |\langle L | \psi \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | + i \langle y |) \left(\frac{1}{5} (3|x\rangle + 4i|y\rangle) \right) \right|^2 = \frac{1}{50}.$$

Ahora ya podemos hallar el momento angular de un fotón:

$$\langle L_z \rangle = \hbar P(\hbar) + (-\hbar) P(-\hbar), \quad (4)$$

Generalizando (4) para N fotones es: $N \langle L_z \rangle$.

Con lo cual, el torque que el haz de N fotones realiza sobre la superficie del material lo escribimos en función de la media del impulso angular y la intensidad \mathbf{I} del haz incidente:

$$\tau = \frac{N \langle L_z \rangle}{\Delta t} \sim \mathbf{I} \langle L_z \rangle = \frac{24}{25} \hbar \mathbf{I}.$$

Donde la intensidad $\mathbf{I} = \frac{N}{\Delta t}$.

(e) Si contamos con un instrumental adecuado para realizar la medición, en el caso que un fotón es absorbido por la superficie de un material obtenemos que le imprime a la superficie un momento angular de valor $L_z = \hbar$ ó $L_z = -\hbar$, según corresponda al estado de polarización incidente.