

# Física Teórica 2 - Guía 2: Formalismo

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

5 de abril de 2023

## 1. Problema 13 (b)

- $B$  tal que  $B^3 = B$ . Para dar un ejemplo veamos que:

$$B^3 - B = B(B + \mathbb{I})(B - \mathbb{I}) = 0$$

por lo que los autovalores de  $B$  deben satisfacer (en la base que lo diagonaliza):

$$\lambda_i^3 - \lambda_i = \lambda_i(\lambda_i + 1)(\lambda_i - 1) = 0$$

(Teorema de Cayley-Hamilton). En este caso, los autovalores  $\lambda_i$  pueden ser  $\lambda_i = +1, 0, -1$ . Esto corresponde al spin 1 (en unidades de  $\hbar$ ):  $B = S_k/\hbar$ ,  $k = 1, 3$ .

- Podemos listar las potencias de  $B$ :

$$B^0 = \mathbb{I} \quad B^1 = B \quad B^2 = B^2 \quad B^3 = B \quad B^4 = B^2 \quad B^5 = B, \dots$$

De donde deducimos que solo hay tres valores para todas las potencias de  $B$ :

$$B^0 = \mathbb{I} \quad B^{2n-1} = B \quad B^{2n} = B^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

Dada una función  $f(x)$  cualquiera podemos extraer la parte de potencia  $x^0$ , la parte de potencias impares  $x^{2n-1}$  y la parte de potencias pares  $x^{2n}$ :

$$f(x) - f(0) = \underbrace{\left[ \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) - f(0) \right]}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{1}{2} (f(x) - f(-x))}_{\text{parte impar}}$$

Cuando  $x = \alpha B$ , las potencias de  $x$  son:  $(\alpha B)^0 = \mathbb{I}$ ,  $(\alpha B)^{2n-1} = \alpha^{2n-1} B$ ,  $(\alpha B)^{2n} = \alpha^{2n} B^2$  por lo que la parte operatorial se factoriza de la serie de potencias de las partes par e impar, por consiguiente:

$$f(\alpha B) = f(0)\mathbb{I} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) - f(0)\right] B^2}_{\text{parte par}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(\alpha) + f(-\alpha)) B}_{\text{parte impar}}$$

Si  $f(-i\alpha B) = e^{-i\alpha B}$ , usamos  $\alpha \rightarrow -i\alpha$  y se obtiene el valor correcto:

$$\boxed{e^{-i\alpha B} = \mathbb{I} + (\cos(\alpha) - 1) B^2 - i \sin(\alpha) B}$$