Física Teórica 2 - Guía 3_Postulados.

Isabel Fuertes Vila

13 de abril de 2023

Problema 10. Incerteza mínima y paquetes Gaussianos. Decimos que un estado $|\psi\rangle$ es un paquete Gaussiano si su función de onda es de la forma

$$\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma_x{}^2)^{1/4}}\exp\left(\frac{ip_o x}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{4\sigma_x{}^2}\right)$$

donde x_0 , p_0 , $\sigma_x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que la densidad de probabilidad en x es una densidad de probabilidad normal con valor medio x_0 y desviación estándar σ_x.

(b) Verifique que la densidad de probabilidad en p, $|\langle p|\psi\rangle|^2=|\psi(p)|^2$ es una densidad normal con valor de expectación p_0 y desviación estándar $\sigma_p = \hbar/(2\sigma_x)$.

(c) Usando lo anterior verifique que el paquete de onda Gaussiano satisface la relación de incerteza posición-momento mínima Sdv(x) Sdv(p) = $\hbar/2$, donde Sdv(·) = $\sqrt{Var\cdot}$ es la desviación estándar.

(d) Muestre que la condición necesaria para tener incerteza mínima, $\Delta x|\psi\rangle = c\Delta p|\psi\rangle$, con $\Delta x = x - \langle x\rangle$, análogamente para Δp y c imaginario, se satisface.

(e) Finalmente, partiendo de la condición necesaria para tener un paquete de incerteza mínima $\Delta x|\psi\rangle = c\Delta p|\psi\rangle$, demuestre que todo estado $|\psi\rangle$ que satisface esta condición es necesariamente un paquete de onda Gaussiano.

<u>Ayudas</u>:

• La densidad de probabilidad normal es:

$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ con μ el valor medio de z y σ su desviación estándar.

• Sea $\mathscr{F}[f(x)](k)$ la transformada de Fourier de f(x) evaluada en k, vale que:

(I) $\mathscr{F}[f(x-a)](k)= e^{-ika}\,\mathscr{F}[f(x)](k)$,

(II) $\mathscr{F}[f(x)\,e^{iax}](k)= \mathscr{F}[f(x)](k-a)$,

(III) $\mathscr{F}[f(e^{i\alpha x})](k)= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$.

Solución

(a) Consideramos el paquete de ondas gaussiano cuya función de onda en el espacio x es:

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x{}^2)^{-1/4}}\exp\left(\frac{ip_o x}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{4\sigma_x{}^2}\right). \qquad (1)$$

La función (1) es una onda plana con número de onda $p_0/\hbar$ modulada por una gaussiana centrada en x_0. La densidad de probabilidad $|\langle x|\psi\rangle|^2$ es una funcional gaussian con ancho σ_x (Ver ayuda). Vamos a hallar los valores de expectación que nos piden de dos formas:

1. Comparando directamente entre ambas expresiones, la densidad de probabilidad y la función de distribución Normal.

2. Haciendo los cálculos.

<u>Resolvamos</u>:

1. Una distribución de probabilidad Normal tiene la siguiente forma funcional:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (2)$$

Donde μ es el valor medio y σ es la desviación estándar.

La densidad de probabilidad del paquete gaussiano en el espacio x resulta:

$$|\psi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_x^2)}}e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}. \qquad (3)$$

Comparando (2) y (3), ambas funciones tienen la misma forma, con lo cual podemos hallar los valores que nos piden:

Valor medio μ: x_0.

Desvío estándar σ: σ_x.

2. Cálculo del Valor medio del paquete gaussiano en el espacio x:

$$\langle x\rangle = \oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} dx\langle\psi|x\rangle x\langle x|\psi\rangle=\oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} dx|\langle x|\psi\rangle|^2=\oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} dx(2\pi\sigma_x{}^2)^{-1/2}\exp(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x{}^2})x_0. \qquad (4)$$

Resolvemos (4) por sustitución. Llamamos u = (x − x_0), reemplazando y resolviendo la integral nos queda lo siguiente:

$$\oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} du(2\pi\sigma_x{}^2)^{-1/2}(u+x_0)\exp(\frac{-u^2}{2\sigma_x{}^2})=\oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} du(2\pi\sigma_x{}^2)^{-1/2}u\exp(\frac{-u^2}{2\sigma_x{}^2})+\oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} du(2\pi\sigma_x{}^2)^{-1/2}x_0\exp(\frac{-u^2}{2\sigma_x{}^2})$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_x{}^2)}}(0+x_0\sqrt{(2\pi\sigma_x^2)})=x_0.$$

Cálculo del Desvío estándar del paquete gaussiano en el espacio x:

Para hallar la desviación estándar a partir de la varianza y resolver las integrales.
Sabemos que:

$$\sigma_x=\sqrt{(Var(x))}=\sqrt{(\langle\Delta x^2\rangle)}. \qquad (5)$$

Con lo cual debemos resolver las integrales siguientes:

$$\langle x^2\rangle= \oint_{\leftarrow\infty}^{\infty} dx\, x^2|\langle x|\alpha\rangle|^2$$

Pero, esas cuentas se las dejo de tarea por si quieren practicar. En este caso, vamos a resolver usando el resultado del valor medio que hallamos anteriormente:

$$Var(x)=\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\langle(x-x_0)^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2(x-x_0)^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2 e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}dx. \qquad (6)$$

Resolvemos por sustitución: $y=x-x_0, \lambda=\frac{1}{2\sigma_x^2}$. Entonces (6) resulta:

$$-\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2}dy=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda^{2/3}}=\sigma_x^2.$$

Luego, $\sigma=\sqrt{(Var(x))}=\sigma_x$.

(b) Hallamos la función de onda en la representación de momento y usamos propiedades de Fourier:

$$\psi(p)=\langle p|\psi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-ipx}{\hbar}}\psi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\hbar}}\mathscr{F}[\psi(x)](\frac{p}{\hbar}). \qquad (7)$$

De (7) obtenemos:

$$\psi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar^2\sigma_x^2)^{1/4}}\mathscr{F}[e^{\frac{i p_0 x}{\hbar}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}](\frac{p}{\hbar}). \tag{8}$$

Aplicamos en (8) la ayuda (II) y obtenemos lo siguiente:

$$\psi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar^2\sigma_x^2)^{1/4}}\mathscr{F}[e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}}](\frac{p-p_0}{\hbar}). \tag{9}$$

Luego, aplicamos (I) en (9) y obtenemos:

$$\psi(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar^2\sigma_x^2)^{1/4}}e^{\frac{i p x_0}{\hbar}}\mathscr{F}[e^{\frac{-x^2}{4\sigma_x^2}}](\frac{p-p_0}{\hbar}). \tag{10}$$

Finalmente (III) en (10) nos da :

$$\psi(p)=\frac{\sqrt{2}\sigma_p}{(2\pi\sigma_p^2)^{1/4}}e^{\frac{i p x_0}{\hbar}} e^{\frac{-(p-p_0)^2}{4\sigma_p^2}}, \text{ con } \quad \sigma_p=\frac{\hbar}{2\sigma_x}. \tag{11}$$

De (11) la densidad de probabilidad resulta:

$$|\psi(p)|^2=\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_p^2)}}e^{\frac{-(p-p_0)^2}{2\sigma_p^2}}. \tag{12}$$

Vemos que (12) se parece a una distribución Normal con $\mu = p_0$

y $\sigma = \sigma_p$ (= $\frac{\hbar}{2\sigma_x}$).

(c) Incerteza mínima:

$$\sigma_x\sigma_p=\sigma_x\frac{\hbar}{2\sigma_x}=\frac{\hbar}{2}. \tag{13}$$

(d) Representación en la base posición:

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle=\langle x|(x-\langle x\rangle)|\psi\rangle=\langle x|x|\psi\rangle+\langle x|\langle x\rangle|\psi\rangle=x\,\psi(x)-\langle x\rangle\,\psi(x)=(x-x_0)\,\psi. \tag{14}$$

Representación en la base de momentos:

$$\langle x|\Delta p|\psi\rangle=\langle x|p|\psi\rangle+\langle x|\langle p\rangle|\psi\rangle=-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)-\langle p\rangle\psi(x)=\frac{i\hbar(x-x_0)}{2\sigma_x}\psi. \qquad (15)$$

Como la base de posición es base completa vemos que (14) y (15) son expresiones iguales sii:

$$\langle x|\Delta x|\psi\rangle=\frac{2\sigma_x}{i\hbar}\left(\frac{i\hbar}{2\sigma_x}\langle x|\Delta p|\psi\rangle\right),$$

$\langle x|\Delta x|\psi\rangle=c\langle x|\Delta p|\psi\rangle$, con $c=\frac{i2\sigma_x}{\hbar}$.

(e) Desarrollamos la representación en la base de posición:

$$\langle x|(x-\langle x\rangle)|\psi\rangle=c\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)-\langle p\rangle\psi(x)\right). \qquad (16)$$

En (16) obtuvimos una ecuación difererncial ordinaria de 1^{er} orden:

$$\frac{d}{dx}\psi(x)+\frac{i}{\hbar c}(\langle x\rangle-c\langle p\rangle-x)\psi=0. \qquad (17)$$

La solución de (17) es la gaussiana $\psi(x)=A\,e^{-\frac{i}{\hbar c}\left[-\langle x\rangle+c\langle p\rangle x+\frac{x^2}{2}\right]}$.