Ejercicio 15 guía 3

Bruno Sivilotti

Abril 2023

1. Enunciado

La siguiente (pseudo) paradoja fue propuesta por D. Mermin (Am. J.Phys. 58, 731 (1990) ver copia en http://materias.df.uba.ar/ft2a2014c1/files/2014/04/Mermin90.pdf o *Phys. Rev. Lett. 65 3373 (1990)*). Considere un sistema de 3 partículas de espín 1/2 (A, B y C) que se preparan en el estado $|\Psi\rangle = (|000\rangle - |111\rangle)/\sqrt{2}$. Cada partícula es llevada a un laboratorio distante de modo tal que el estado del conjunto no se modifica durante el viaje.

(a) Muestre que $|\Psi\rangle$ es un autoestado de los siguientes operadores: $O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y$, $O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y$, $O_3 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ y $O_4 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$. Diga cuales son los autovalores correspondientes.

(b) Suponga que en cada laboratorio se mide σ_x obteniendose los valores $m_x^{(A)}$, $m_x^{(B)}$ y $m_x^{(C)}$. ¿Cuanto vale el producto de estos tres valores medidos?

(c) Suponga en cambio que en cada laboratorio se toma la decisión (de manera independiente y aleatoria) de medir σ_x o σ_y. Considere un experimento en el cual dos observadores miden σ_y y uno mide σ_x. ¿Cuanto vale el producto de los tres resultados?

(d) Nuestro sentido común nos indica que el resultado de la medición de σ_x en A no puede depender de cual haya sido el observable que midieron B y C. Discuta este argumento.

(e) Si se convenció de la validez de la afirmación anterior note que puede razonar del mismo modo para B y C (o sea, los valores medidos en B no pueden depender de lo que decidan medir A y C, etc).

(f) En consecuencia, si los valores medidos de σ_j en cada laboratorio los denominamos $m_j^{(A;B;C)} = \pm 1$ debemos concluir que $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$, $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ y $m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1$. Es esto compatible con la igualdad $m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = -1$?

(g) Discuta si lo anterior muestra una inconsistencia de la mecánica cuántica o símplemente ilustra su contradicción con nuestro sentido común (recuerde la consigna: los experimentos que no se realizan no tienen resultados y encuentre el argumento contrafáctico en la formulación de la paradoja).

2. Resolución

a) Para resolver este inciso, recordemos brevemente cómo se aplican los operadores sobre sistemas compuestos. Si $\hat{O}_A$ y $\hat{O}_B$ son dos operadores que actúan sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_A$ y $\mathcal{H}_B$

respectivamente, y $|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B$ es un estado producto arbitrario, entonces

$$(\hat{O}_A \otimes \hat{O}_B)\,|\psi\rangle = (\hat{O}_A \otimes \hat{O}_B)(|\phi\rangle_A \otimes |\varphi\rangle_B) = \hat{O}_A\,|\phi\rangle_A \otimes \hat{O}_B\,|\varphi\rangle_B\,. \tag{1}$$

También nos va a ser útil recordar como actúan los σ_x y σ_y sobre los autoestados de σ_z.

$$\begin{cases} \sigma_x\,|0\rangle = |1\rangle \\ \sigma_x\,|1\rangle = |0\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_y\,|0\rangle = i\,|1\rangle \\ \sigma_y\,|1\rangle = -i\,|0\rangle \end{cases} \tag{2}$$

Con esto, al aplicar O_1 sobre $|\Psi\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned} O_1\,|\Psi\rangle = (\sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y)\frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{\sigma_x\,|0\rangle \otimes \sigma_y\,|0\rangle \otimes \sigma_y\,|0\rangle - \sigma_x\,|1\rangle \otimes \sigma_y\,|1\rangle \otimes \sigma_y\,|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ = \frac{|1\rangle \otimes i\,|1\rangle \otimes i\,|1\rangle - |0\rangle \otimes (-i)\,|0\rangle \otimes (-i)\,|0\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{-\,|111\rangle + |000\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De forma completamente análoga, se puede corroborar que aplicar O_2 u O_3 da el mismo resultado. Mientras que O_4 sobre $|\Psi\rangle$ queda

$$\begin{aligned} O_4\,|\Psi\rangle = (\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x)\frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{\sigma_x\,|0\rangle \otimes \sigma_x\,|0\rangle \otimes \sigma_x\,|0\rangle - \sigma_x\,|1\rangle \otimes \sigma_x\,|1\rangle \otimes \sigma_x\,|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ = \frac{|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle}{\sqrt{2}} &= \frac{|111\rangle - |000\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

En resumen, verificamos que se cumple

$$\begin{cases} O_1\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \\ O_2\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \\ O_3\,|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \\ O_4\,|\Psi\rangle = -\,|\Psi\rangle \end{cases} \tag{3}$$

b) Si se midiese σ_x en cada laboratorio se está midiendo el observable O_4 y ya vimos que $|\Psi\rangle$ es autoestado de dicho observable de autovalor -1, por lo tanto se tiene:

$$m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = -1 \tag{4}$$

c) Si en cambio se midiese σ_x en un laboratorio y σ_y en los dos restantes estamos en el caso de O_1, O_2 u O_3 y ya vimos que $|\Psi\rangle$ es autoestado de dichos observables con autovalor +1, por lo tanto se tiene:

$$m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1, \quad m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1, \quad m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1 \tag{5}$$

d, e, f) En estos incisos vamos a pensar como **no** hay que pensar estos temas. Vamos a utilizar nuestra intuición de la física clásica y a sacar conclusiones a partir de la misma que veremos que están en conflicto con lo que nos dice la teoría cuántica. Voy a tratar de ser lo más convincente posible en los argumentos de esta sección, pero tengan en mente que no son correctos y traten de averiguar dónde está el error. En el inciso (g) explicaré porqué es incorrecto el razonamiento.

La intuición nos dice que si tenemos una partícula en cada laboratorio, la medición de una de ellas no debería depender de lo que decidan medir en los otros dos laboratorios. Para hacer más claro el argumento pongamosle nombre a los físicos que hacen los experimentos, supongamos que Frodo, Sam, y Pippin tienen un sistema de 3 partículas descrito por el estado $|\Psi\rangle$ (para los que se preguntan cómo nuestros pequeños hobbits lograron generar dicho estado, fue un regalo de Gandalf, que todos sabemos puede fabricar estados cuánticos puros a voluntad). Los 3 hobbits se ponen de acuerdo en que cada uno se llevará una partícula y transcurrido un año medirá σ_x sobre la misma. Así, nuestros pequeños aventureros guardan su tesoro y siguen con su vida. Frodo va a visitar a los elfos en Rivendel, Pippin parte en un viaje a Gondor para rencontrarse con sus viejos amigos de su época de guardia de la ciudadela, y el fiel Sam no abandona la comarca porque tiene una familia que cuidar. Al transcurrir un año del acuerdo, los protagonistas de nuestra historia se proponen realizar la medición pre-establecida. Frodo recuerda medir σ_x pero, como era de esperarse, Pippin confunde qué componente del spin debía medir y termina midiendo σ_y, mientras que a Sam una de sus hijas, queriendo ser una hobbit experimental como su padre, le modifica la orientación del imán de x a y. Por lo tanto, Frodo mide σ_x pero Sam y Pippin miden σ_y. ¿Podría esto alterar la medición de Frodo? Frodo tuvo su partícula guardada durante un año ¿Cómo un error a último momento de sus amigos que están a miles de kilometros de distancia puede alterar su medición? Esto pareciera absurdo, es claro según la lógica de la Tierra Media que la medición de Frodo no depende de lo que hagan Sam y Pippin. Equivalentemente, la medición de Pippin no puede depender de lo que hagan Frodo y Sam, ni la de Sam de lo que hagan Frodo y Pippin. Cada uno de los $m_j^{(A;B;C)}$ parecería ser independiente del resto.

Entonces, multiplicando los tres términos de la ecuación (5):

$$(m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)})(m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)})(m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)}) = (+1)^3 \tag{6}$$

$$m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} (m_y^{(A)})^2 (m_y^{(B)})^2 (m_y^{(C)})^2 = 1 \tag{7}$$

$$m_x^{(A)} m_x^{(B)} m_x^{(C)} = 1 \tag{8}$$

Donde en el segundo paso usamos que los m_y pueden valer ± 1, por lo que su cuadrado es $+1$.

Sin embargo, esto está en contradicción con lo visto en el inciso (b). ¿Qué está mal?

g) Hay varias formas de ver porqué el razonamiento anterior está mal. Un error está en suponer que los $m_x^{(j)}$ y $m_y^{(j)}$ con $(j = A, B, C)$ están definidos simultaneamente y de ante mano. Como ya escucharon varias veces, los experimentos que no se realizan no tienen resultados, por lo que no es correcto asumir que se pueden tener a disposición los resultados de las mediciones de $\sigma_x^{(A)}$ y $\sigma_y^{(A)}$ simultaneamente. Ya vimos que son operadores complementarios, saber con certeza uno de los dos deja con completa incerteza el resultado del otro. Otra forma de ver porqué está mal la cuenta anterior es analizar con un poco más de cuidado los términos. Sabemos que si medimos O_1 obtenemos $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ y si medimos O_2 obtenemos $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$, sin embargo, el $m_y^{(C)}$ que se obtuvo al medir O_1 no necesariamente es el mismo que se obtuvo al medir O_2. Como los $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son autoestados de σ_z, los m_x y los m_y tienen 1/2 de probabilidad de valer +1 y 1/2 de valer -1. Es decir, al medir O_1 la condición $m_x^{(A)} m_y^{(B)} m_y^{(C)} = +1$ se puede cumplir de todas las siguientes formas

$$\begin{cases} m_x^{(A)} = +1, m_y^{(B)} = +1, m_y^{(C)} = +1 \\ m_x^{(A)} = +1, m_y^{(B)} = -1, m_y^{(C)} = -1 \\ m_x^{(A)} = -1, m_y^{(B)} = +1, m_y^{(C)} = -1 \\ m_x^{(A)} = -1, m_y^{(B)} = -1, m_y^{(C)} = +1 \end{cases} \tag{9}$$

Lo mismo aplica para cómo se puede cumplir que al medir O_2 se obtenga $m_y^{(A)} m_x^{(B)} m_y^{(C)} = +1$

$$\begin{cases} m_y^{(A)} = +1, m_x^{(B)} = +1, m_y^{(C)} = +1 \\ m_y^{(A)} = +1, m_x^{(B)} = -1, m_y^{(C)} = -1 \\ m_y^{(A)} = -1, m_x^{(B)} = +1, m_y^{(C)} = -1 \\ m_y^{(A)} = -1, m_x^{(B)} = -1, m_y^{(C)} = +1 \end{cases} \tag{10}$$

Y cómo se puede cumplir que el medir O_3 se obtenga $m_y^{(A)} m_y^{(B)} m_x^{(C)} = +1$

$$\begin{cases} m_y^{(A)} = +1, m_y^{(B)} = +1, m_x^{(C)} = +1 \\ m_y^{(A)} = +1, m_y^{(B)} = -1, m_x^{(C)} = -1 \\ m_y^{(A)} = -1, m_y^{(B)} = +1, m_x^{(C)} = -1 \\ m_y^{(A)} = -1, m_y^{(B)} = -1, m_x^{(C)} = +1 \end{cases} \tag{11}$$

Con esto debería quedar claro que el paso de la ecuación (6) a la ecuación (7) no es válido, ya que los distintos $m_y^{(j)}$ provienen de distintos experimentos y no son necesariamente iguales.

También de lo anterior se puede ver que las mediciones en cada uno de los laboratorios no son independientes. Si por ejemplo Frodo (A) decide medir σ_y y obtiene +1, Sam (B) mide σ_x y obtiene -1, Pippin solo puede medir -1 si decide medir σ_x.