Postulado de proyección o colapso

Juani Gargano

12 de abril de 2023

Repasemos primero el concepto de colapso. Supongamos que tenemos un espacio de Hilbert H que describe a (los grados de libertad de) nuestro sistema, un operador autoadjunto A y una base ortonormal $B = \{|\alpha\rangle : \alpha \in \Lambda\}$ de autoestados de A. En estas condiciones, consideremos un estado de nuestro sistema $|\psi\rangle \in H$. En términos de la base, tenemos que

$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle\alpha|\psi\rangle|\alpha\rangle. \tag{1}$$

El **postulado de colapso** nos dice que si el resultado de medir A fue algún $\alpha \in \Lambda$ (recordar que sólo se pueden medir autovalores), entonces el estado luego de la medición será

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{||P_\alpha\psi\rangle||}P_\alpha|\psi\rangle = \frac{1}{\langle\psi|{P_\alpha}^\dagger P_\alpha|\psi\rangle^{1/2}}P_\alpha|\psi\rangle = \frac{1}{\langle\psi|P_\alpha|\psi\rangle^{1/2}}P_\alpha|\psi\rangle, \tag{2}$$

donde primero proyectamos sobre el autoespacio de autovalor α y exigimos que el estado tenga norma 1, y después usamos que, como P_α es proyector, es autoadjunto e idempotente. Separemos en 2 casos:

- Si el espectro de A es no degenerado, $P_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$, y entonces

  $$|\psi'\rangle = \frac{1}{[\langle\psi|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle]^{1/2}}|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle = \frac{\langle\alpha|\psi\rangle}{|\langle\alpha|\psi\rangle|}|\alpha\rangle = e^{i\theta}|\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle. \tag{3}$$

  Notar que teníamos que $\langle P_\alpha\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|P_\alpha|\psi\rangle = |\langle\alpha|\psi\rangle|^2 = P(\alpha|\psi)$, eso es, la probabilidad de medir α en el estado ψ.

- Si el espectro de A es no degenerado, agrupando autoestados por autovalor en la ecuación (1), la escribimos como $|\psi\rangle = \sum\limits_{\alpha\in\Lambda}\sum\limits_{\beta\in\Lambda_\alpha}\langle\alpha,\beta|\psi\rangle|\alpha,\beta\rangle$. Ahora, $P_\alpha = \sum\limits_{\beta\in\Lambda_\alpha}|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|$, y entonces

  $$|\psi'\rangle = \frac{1}{(\sum\limits_{\beta\in\Lambda_\alpha}|\langle\alpha,\beta|\psi\rangle|^2)^{1/2}}\sum_{\beta\in\Lambda_\alpha}|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|\psi\rangle. \tag{4}$$

  Notar que en el denominador aparece la probabilidad de medir el autovalor α.

Pregunta/Ejercicio: ¿Qué pasa si la dimensión del espacio es no numerable, o sea, la base tiene un índice que barre valores continuos? ¿Cómo se escribe el operador de proyección en un autoespacio? Pensar el ejemplo de una partícula libre de espín $1/2$ (necesitan saber producto tensorial de estados, que veremos más adelante). Si entienden este caso entonces habrán masterizado este postulado.

(Problema 6) *Considere un sistema de dimensión 3 y sea* $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ *una base ortonormal. Considere los observables A, B y C dados por*

$$A = a(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - a|3\rangle\langle 3|,$$
$$B = b(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|) - b|2\rangle\langle 2|,$$
$$C = c(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + 2c|3\rangle\langle 3|,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que estos tres operadores conmutan entre sí y poseen una base común de autoestados.

(b) Suponga que se miden los observables A y B sobre el sistema y se obtienen como resultados a y b. ¿Puede decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(c) Suponga ahora que en cambio se miden los observables A y C sobre el sistema, obteniendo los resultados a y c. ¿Puede ahora decir con certeza cuál es el estado luego de la medición? En caso afirmativo escriba el estado.

(d) Diga qué combinaciones de los operadores A, B y C forman un conjunto completo de observables que conmutan (CCOC).

(a) Para ver fácilmente que conmutan utilicemos la base dada para escribir las matrices de los operadores en esa base. Observamos que como los operadores están escritos en términos de proyectores (o sea en su descomposición espectral), entonces son diagonales en esta base.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}.$$

Como las matrices diagonales conmutan entre sí, entonces nuestras matrices también lo hacen, y en definitiva los operadores también. Recordar que tenemos el hecho de que 2 operadores conmutan si y solo si existe una base que los diagonaliza simultáneamente. En este caso la base del enunciado ya diagonaliza simultáneamente a los 3 operadores, así que no hay que hacer ningún esfuerzo.

> *Pregunta: Supongamos que estamos en la situación del problema, que tenemos 3 operadores autoadjuntos que conmutan entre sí, es decir, de a pares. El teorema nos habilita a decir que existen bases que diagonalizan a los operadores* ***de a pares****. ¿Existirá siempre alguna base ortonormal que diagonalice a los 3 al mismo tiempo?*
> *Como dijimos en clase, la respuesta es* ***sí****, pero para no perder la oportunidad de hacer una pregunta, pensar por qué vale la pena hacer la pregunta anterior; ¿es automático que vale para varios operadores? Para entender bien esto pueden demostrar esta propiedad para el caso en que uno de los operadores tiene espectro no degenerado, es decir, supongamos que invocamos una base que diagonaliza a A y B, y supongamos también que el espectro de A es no degenerado. ¿Qué pasa con C en esa base? Y si ahora A en vez de tener espectro no degenerado tiene un autovalor de degeneración 2, ¿qué se puede decir ahora? Ajustando la base para C sea diagonal, ¿cómo queda B?*

(b) Como A y B conmutan, no importa en que órden se hagan las mediciones. Notar que, por cómo escribimos los operadores, los proyectores quedan

$$P_a = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|, \ P_b = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|.$$

Supongamos que nuestro estado inicial es

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle,$$

Supongamos que primero se midió A, por lo dicho anteriormente es indistinto si no. Luego de la primera medición, el estado va a ser

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{(|c_1|^2 + |c_2|)^{1/2}}[c_1|1\rangle + c_2|2\rangle] = \tilde{c_1}|1\rangle + \tilde{c_2}|2\rangle. \tag{5}$$

O sea, el nuevo estado consiste de proyectar el anterior en el subespacio de autovalor a y reescalar, de manera **consistente**, los coeficientes que sobreviven. Luego de la segunda medición, el estado va a ser

$$|\psi''\rangle = \frac{1}{(|\tilde{c_1}|^2)^{1/2}}\tilde{c_1}|1\rangle \equiv |1\rangle. \tag{6}$$

Por lo tanto, el estado luego de las 2 mediciones está completamente determinado.

(c) De vuelta, no importa el orden en que se hagan las mediciones. Notar que $P_c = P_a = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$, así que

$$|\psi''\rangle \propto P_a|\psi'\rangle \propto P_a P_a|\psi\rangle = P_a|\psi\rangle = |\psi'\rangle = \tilde{c_1}|1\rangle + \tilde{c_2}|2\rangle, \tag{7}$$

por lo que no podemos decir demasiado del estado final. Sólo podemos decir que los coeficientes que acompañan a esos autoestados son reescalados de los originales, pero de esos no sabemos nada…

(d) Recordar que un CCOC es una colección de operadores compatibles que permiten, mediante sucesivas mediciones (en cualquier orden) determinar un autoestado, o equivalentemente, identificar todos los autoestados posibles mediante sus autovalores de los operadores del conjunto. Analicemos cada caso. Notar que el conjunto $\{O\}$ es un CCOC si y solo si O tiene espectro no degenerado, lo cual no ocurre para ninguno de los operadores. Las únicas combinaciones de 2 operadores que forman un CCOC son $\{A, B\}, \{B, C\}$, ya que por mediciones sucesivas se pueden distinguir todos los autoestados. Veamos el primer conjunto.
Si el estado inicial es $|1\rangle$ y mido el observable A, voy a obtener el valor a (el resultado de medir a tiene probabilidad 1), mientras que si mido el observable B, voy a obtener b. Variando el autoestado incial, armamos la siguiente tabla.

Estado inicial	Valor de medición de A	Valor de medición de B	Potencial etiqueta
$\|1\rangle$	a	b	$\|a, b\rangle$
$\|2\rangle$	a	$-b$	$\|a, -b\rangle$
$\|3\rangle$	$-a$	b	$\|-a, b\rangle$

Como vemos, se pueden distinguir todos los autoestados mediante sus autovalores. Mediante este método, veamos por ejemplo por qué $\{A, C\}$ no es un CCOC. Nos hacemos la siguiente tabla

Estado inicial	Valor de medición de A	Valor de medición de C	Potencial etiqueta
$\|1\rangle$	a	c	$\|a, c\rangle$
$\|2\rangle$	a	c	$\|a, c\rangle$
$\|3\rangle$	$-a$	$2c$	$\|-a, 2c\rangle$

Vemos que hay 2 autoestados que tienen la misma etiqueta, por lo tanto no nos sirve. Por último, $\{A, B, C\}$ es un CCOC, ya que contiene 2 operadores que forman un CCOC, aunque etiquetar a los estados como $|a, b, c\rangle$ es dar más información de la necesaria.