Física Teórica 2 - Guía 5_Dinámica.

Isabel Fuertes Vila

27 de abril de 2023

**Problema 2. Precesión del spin en un campo magnético.** Una partícula de spin 1/2 tiene un momento angular intrínseco **S**. Si la partícula está cargada eléctricamente, asociado a este momento angular la partícula tiene también un momento magnético intrínseco **μ**, dado por

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}, \quad \gamma = g\frac{q}{2m},$$

con m y q la masa y carga de la partícula, respectivamente, y g es una constante adimensional, denominada factor-g, que depende de la partícula. Para el caso de un electrón, $q = -|e|$ y $g \approx 2$.

En presencia de un campo magnético externo, se tiene una energía de interacción entre el campo y el momento magnético de la partícula

$$\mathbf{H} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -\gamma\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}.$$

Si el campo magnético externo es uniforme y en la dirección $\hat{z}$, $\mathbf{B}=B\hat{z}$ (con B constante), entonces

$$H = -\gamma B S_z = -\left(\frac{gqB}{2m}\right)S_z = \left(\frac{|e|B}{m}\right)S_z,$$

donde en la última igualdad usamos los valores de q y de g para el electrón. Finalmente, notando que $\omega=|e|B/m$ tiene unidades de frecuencia, podemos reescribir el Hamiltoniano de la interacción magnética con el spin del electrón como

$$H = \left(\frac{|e|B}{m}\right)S_z = \omega S_z.$$

**(a)** Verifique que los autoestados de $S_z$, $|+,\hat{z}\rangle$ y $|-,\hat{z}\rangle$, son también autoestados del Hamiltoniano y calcule los correspondientes autovalores.

**(b)** Suponga que inicialmente, a t=0, el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |+,\hat{x}\rangle$. Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ en un instante t posterior.

**(c)** Calcule la probabilidad en función del tiempo de medir $S_x$ y obtener los resultados $\frac{\hbar}{2}$ y $-\frac{\hbar}{2}$. Grafique las probabilidades en función del tiempo. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que las probabilidades de obtener $\pm\frac{\hbar}{2}$ los resultados al medir $S_x$ sean las mismas que las iniciales a t= 0.

**(d)** Calcule los valores de expectación $<S_x>$, $<S_y>$ y $<S_z>$ en función del tiempo y grafique. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que los valores medios $S_x$ y $S_y$ tomen el mismo valor que el inicial a t=0?

**(e)** Grafique el vector de Bloch del estado $|\psi(t)>$ a cada tiempo t (equivalentemente, encuentre en función de t el versor $\hat{n}(t)$ tal que $|\psi(t)>$ es autoestado del operador $\boldsymbol{S}\cdot\hat{n}(t)$ con autovalor $\frac{\hbar}{2}$) y grafique el versor $\hat{n}(t)$).

**(f)** ¿Cómo puede interpretar la evolución temporal del spin generada por el Hamiltoniano de interacción magnética?

<u>Solución</u>

**(a)** Veamos si los autoestados de $\hat{S}_z$ también son autoestados del hamiltoniano del sistema:

$$\hat{H}\ |+,\ \hat{z}>= \omega\hat{S}_z\ |+,\ \hat{z}>=\ \omega\ \frac{\hbar}{2}|+,\ \hat{z}>$$

$$\hat{H}\ |-,\ \hat{z}>= \omega\hat{S}_z\ |-,\ \hat{z}>=\ \omega\ \left(-\frac{\hbar}{2}\right)|-,\ \hat{z}>$$

Luego, verificamos que los autoestados de $\hat{S}_z$ son autoestados del hamiltoniano. Los autovalores asociados a los autoestados del hamiltoniano son los autovalores de energía del sistema: $\pm\frac{\omega\hbar}{2}$.

**(b)** Nos dicen que inicialmente el estado de sistema es:

$$|\Psi(0)>= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+>+|->)=|+,\hat{x}>)\ . \qquad (1)$$

¿Cómo evolucionará, para un tiempo t>0, el estado del electrón en presencia de un campo magnético externo?

Conociendo el hamiltoniano del sistema, el operador de evolución temporal $\hat{U}(t,t_0)$ nos permite encontrar el estado de la partícula en todo momento. Aplicamos $\hat{U}(t,t_0)$ en (1):

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\Psi(0)\rangle = \exp(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0))|\Psi(0)\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\exp(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t)|+\rangle+\exp(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t)|-\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}[\exp(-i\frac{\omega\hbar}{2\hbar}t)|+\rangle+\exp(i\frac{\omega\hbar}{2\hbar}t)|-\rangle] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{\omega t}{2})(|+\rangle+|-\rangle)-i\sin(\frac{\omega t}{2})(|+\rangle-|-\rangle)] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{\omega t}{2})|+,\hat{x}\rangle-i\sin(\frac{\omega t}{2})|-,\hat{x}\rangle]. \qquad (2)$$

Como vemos en el resultado (2), debido a la interacción con el campo magnético externo, el sistema pasó de estar inicialmente en el estado en $|+,\hat{x}\rangle$, a estar en $t>0$ en un estado que es combinación de los estados $|+,\hat{x}\rangle$ y $|-,\hat{x}\rangle$.

**Otra forma de resolver** (Tarea):
Notemos lo siguiente, el operador evolución temporal de nuestro sistema lo escribimos como:

$$\hat{U}(t,t_0) = \exp(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t-t_0)) = \exp(-i\frac{\omega\hat{S}_z\hbar}{2\hbar}t) = \exp(-i\frac{\omega\hat{\sigma}_z}{2}t). \qquad (3)$$

Entonces, directamente podemos usar el desarrollo en Taylor del operador evolución y aplicarlo a nuestro estado inicial para encontrar su evolución en el tiempo:

$$\hat{U}(t,t_0) = \cos(\frac{\omega t}{2})\mathrm{Id} - i\sin(\frac{\omega t}{2})\ \hat{\sigma}_z. \qquad (4)$$

**(c)** Probabilidad de medir $+\frac{\hbar}{2}$:

$$P(+\frac{\hbar}{2}) = |\langle+,\hat{x}|\psi(t)\rangle|^2 = \cos(\frac{\omega t}{2})^2. \qquad (5)$$

Para hallar la probabilidad de medir $-\frac{\hbar}{2}$, una forma es calcularlo directamente:

$$P(-\frac{\hbar}{2}) = |<-,\hat{x}|\psi(t)>|^2 = sen(\frac{\omega t}{2})^2 . \qquad (6)$$

Pero, como sabemos que la probabilidad total se conserva:

$$P(+\frac{\hbar}{2})+P(-\frac{\hbar}{2})=1 . \qquad (7)$$

A partir de (7) obtenemos:

$$P(-\frac{\hbar}{2}) = 1-P(+\frac{\hbar}{2}) = 1-\cos(\frac{\omega t}{2})^2 = sen(\frac{\omega t}{2})^2 . \qquad (8)$$

El gráfico de la probabilidades oscila para todo tiempo. Las probabilidades (5) y (6) inicialmente a t=0 son $P(+\frac{\hbar}{2})=1$ y $P(-\frac{\hbar}{2})=0$. Hasta que se vuelven a encontrar en el estado inicial, se obtiene un tiempo $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

**(d)** Valores medios:

$$<\hat{S}_x>= +\frac{\hbar}{2}P(+\frac{\hbar}{2}) + (-\frac{\hbar}{2})P(-\frac{\hbar}{2}) = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t).$$

$$<\hat{S}_y>= +\frac{\hbar}{2}P(+\frac{\hbar}{2}) + (-\frac{\hbar}{2})P(-\frac{\hbar}{2}) = \frac{\hbar}{2}sen(\omega t).$$

Inicialmente a t=0 los valores medios son $<\hat{S}_x>=\frac{\hbar}{2}$ y $<\hat{S}_y>=0$. Vuelven al mismo estado en $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

$<\hat{S}_z>= 0$, lo cual indica que el sistema tiene igual probabilidad de encontrase en $+\frac{\hbar}{2}$ y en $-\frac{\hbar}{2}$.

**(e)** Quiero hallar $\hat{n}(t)$ tal que:

$$\mathbf{S}.\hat{n}(t)|\psi(t)>= +\frac{\hbar}{2}|\psi(t)>. \qquad (9)$$

Donde:

$$|\psi(t)>= \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{\omega t}{2})|+,\hat{x}>-i\sin(\frac{\omega t}{2})|-,\hat{x}>],$$

$$\hat{n}(t)=(sen(\beta)\cos(\alpha), sen(\beta)sen(\alpha), \cos(\beta)).$$

Una forma es desarrollar (9) y resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.
Pero, tenemos otra forma de resolver más rápida. Sabemos, por la teoría, que en general podemos escribir el valor medio de cualquier operador $\hat{A}$ como:

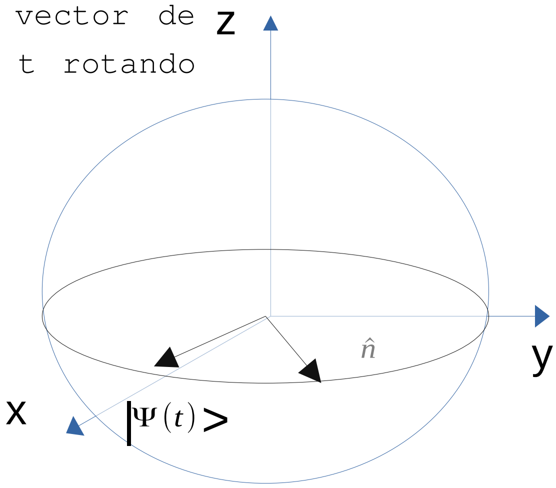
$$<\hat{A}>= \mathrm{Tr}(|\psi><\psi|\hat{A}) . \qquad (10)$$

Entonces, por (10):

$$<(\hat{\sigma}_i)>=\mathrm{Tr}(|\psi><\psi|(\hat{\sigma}_i)=\frac{1}{2}[\mathrm{Tr}((\sigma_i)\mathrm{Id})+\mathrm{Tr}((\sigma_i)(\hat{n}.\bar{\sigma}))]=\frac{1}{2}(\hat{n}(t)_i)\mathrm{Tr}(\mathrm{Id})=(\hat{n}(t)) .$$

Encontramos que $(\hat{n}(t))= <(\hat{\sigma}_i)>=\frac{\langle\vec{S}\rangle}{\frac{\hbar}{2}}=(\cos(\omega t),\sin(\omega t),0)$ .

En la esfera de Bloch graficamos del vector de estado $|\psi(t)>$ y el versor $\hat{n}(t)$ para un t rotando en el plano xy.




**(f)** La evolución temporal del spin generada por un hamiltoniano de interacción magnética queda determinada por el operador evolución (3) del sistema que tiene la siguiente forma:

$\hat{U}(t,t_0)=\exp(-i\frac{\omega t}{2}\sigma_z)$, de donde podemos interpretar que $\sigma_z$ es el generador de las rotaciones alrededor del eje Z con frecuencia ω.