

Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2023

Guía 5: Dinámica

I. Representación de Schrödinger

P1 Rotación de la polarización en un cristal. Al atravesar un cristal de ciertos materiales, como por ejemplo de cuarzo, un fotón sufre un cambio en su polarización. Esta variación de polarización se puede representar mediante un Hamiltoniano que actúa sobre el grado de libertad de polarización del fotón y que, si el fotón se propaga en la dirección del eje óptico del cristal, se escribe en la base de polarización lineal $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ como

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde E_0 es una constante con unidades de energía (que depende de las propiedades del material y de la frecuencia del fotón).

- Encuentre los autoestados y autovalores del Hamiltoniano.
- Suponga que el fotón entra al cristal linealmente polarizado en dirección $|H\rangle$. Encuentre el estado del fotón a todo tiempo. Diga qué le ocurre a la polarización del fotón mientras viaja a través del cristal.
- Grafique para cada tiempo el vector de Bloch del estado encontrado en el ítem anterior. Interprete.

P2 Precesión del spin en un campo magnético. Una partícula de spin $1/2$ tiene un momento angular intrínseco \mathbf{S} . Si la partícula está cargada eléctricamente, asociado a este momento angular la partícula tiene también un momento magnético intrínseco $\boldsymbol{\mu}$, dado por

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}, \quad \gamma = g \frac{q}{2m},$$

con m y q la masa y carga de la partícula, respectivamente, y g es una constante adimensional, denominada *factor-g*, que depende de la partícula. Para el caso de un electrón, $q = -|e|$ y $g \approx 2$.

En presencia de un campo magnético externo, se tiene una energía de interacción entre el campo y el momento magnético de la partícula

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

Si el campo magnético externo es uniforme y en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ (con B constante), entonces

$$H = -\gamma B S_z = -\left(\frac{gqB}{2m}\right) S_z = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z,$$

donde en la última igualdad usamos los valores de q y de g para el electrón. Finalmente, notando que $\omega = |e|B/m$ tiene unidades de frecuencia, podemos reescribir el Hamiltoniano de la interacción magnética con el spin del electrón como

$$H = \left(\frac{|e|B}{m}\right) S_z = \omega S_z.$$

- Verifique que los autoestados de S_z , $|+\rangle, |\hat{\mathbf{z}}\rangle$ y $|-\rangle, |\hat{\mathbf{z}}\rangle$, son también autoestados del Hamiltoniano y calcule los correspondientes autovalores.
- Suponga que inicialmente, a $t = 0$, el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle, |\hat{\mathbf{x}}\rangle$. Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ en un instante t posterior.

- (c) Calcule la probabilidad en función del tiempo de medir S_x y obtener los resultados $+\hbar/2$ y $-\hbar/2$. Grafique las probabilidades en función del tiempo. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que las probabilidades de obtener los resultados $\pm\hbar/2$ al medir S_x sean las mismas que las iniciales a tiempo $t = 0$?
- (d) Calcule los valores de expectación $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ y $\langle S_z \rangle$ en función del tiempo y grafique. ¿Qué tiempo T hay que esperar para que los valores medios de S_x y S_y tomen el mismo valor que el inicial a $t = 0$?
- (e) Grafique el vector de Bloch del estado $|\psi(t)\rangle$ a cada tiempo t (equivalentemente, encuentre en función de t el versor $\hat{\mathbf{n}}(t)$ tal que $|\psi(t)\rangle$ es autoestado del operador $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$ con autovalor $+\hbar/2$ y grafique el versor $\hat{\mathbf{n}}(t)$).
- (f) ¿Cómo puede interpretar la evolución temporal del spin generada por el Hamiltoniano de interacción magnética?

P3 Oscilaciones de neutrinos. Los *neutrinos* son partículas fundamentales de la familia de los *leptones*. Existen distintas familias de neutrinos (*sabores*): electrónicos (ν_e), muónicos (ν_μ) y tauónicos (ν_τ). En lo que sigue, por simplicidad se consideran solamente dos sabores de neutrinos, ν_e y ν_μ . Se llaman “estados de masa”, $|\nu_1\rangle$ y $|\nu_2\rangle$, a los autoestados del Hamiltoniano libre (relativista) de los neutrinos, es decir los estados tales que

$$H |\nu_i(\mathbf{p})\rangle = E(\mathbf{p}) |\nu_i(\mathbf{p})\rangle, \quad E_i^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m_i^2,$$

en unidades tales que $c = 1$. En las interacciones débiles (fuerza nuclear débil) los neutrinos se producen con un *sabor* bien definido, $|\nu_e\rangle$ o $|\nu_\mu\rangle$. Estos autoestados de *sabor* ($\{|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle\}$) se pueden escribir en función de los autoestados de *masa* ($\{|\nu_1(\mathbf{p})\rangle, |\nu_2(\mathbf{p})\rangle\}$) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= \cos \theta |\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \sin \theta |\nu_2(\mathbf{p})\rangle, \\ |\nu_\mu\rangle &= -\sin \theta |\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \cos \theta |\nu_2(\mathbf{p})\rangle, \end{aligned}$$

donde θ es el “ángulo de mezclado”.

- (a) Considerando que la evolución temporal está generada por el Hamiltoniano libre H , calcular la probabilidad de medir un neutrino muónico a tiempo $t > 0$ si a tiempo $t = 0$ se tenía un neutrino electrónico. A este proceso se lo conoce como “oscilaciones de sabor de neutrinos”.
- (b) Dado que los neutrinos pueden considerarse partículas ultrarelativistas ($p \gg m$), se puede aproximar la diferencia de energías entre los autoestados de masa como

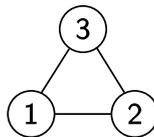
$$E_i(\mathbf{p}) - E_j(\mathbf{p}) \approx \frac{m_i^2 - m_j^2}{2p}.$$

Reescriba la probabilidad hallada en el ítem anterior en función de la diferencia de masas $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Muestre que si la diferencia de masas es nula, entonces el fenómeno de oscilaciones no ocurre. (Originalmente se creía que los neutrinos no tenían masa; fue justamente la observación de estas oscilaciones que permitió concluir que en cambio las partículas sí eran masivas).

P4 Molécula triatómica. Considere una molécula cíclica triatómica como se muestra en la figura. Suponga que $|\psi_n\rangle$ con $n = 1, 2, 3$ representa el estado de un electrón localizado en el átomo n -ésimo. Los $|\psi_n\rangle$ son vectores ortonormales y en lo que sigue consideraremos el espacio de Hilbert generado por ellos. Si despreciamos la posibilidad de que el electrón salte de un átomo a otro, el Hamiltoniano H_0 es tal que $|\psi_n\rangle$ es autovector con autovalor E_0 independiente de n . Definimos el operador de *traslación cíclica* R según

$$R |\psi_n\rangle = |\psi_{n+1}\rangle,$$

donde utilizamos los índices cíclicamente (es decir, $3 + 1 \equiv 1$).



- (a) Muestre que los autovalores de R son las raíces cúbicas de la unidad y halle los autovectores asociados. ¿Puede asegurar que estos autovectores de R lo son también de H_0 ?
- (b) Suponga ahora que se agrega al Hamiltoniano H_0 un término suplementario W que hace que el electrón pueda saltar de un átomo a otro, dado por

$$W |\psi_n\rangle = -V_0 (|\psi_{n-1}\rangle + |\psi_{n+1}\rangle),$$

donde $V_0 > 0$ es una constante con unidades de energía y se ha usado la notación cíclica. Muestre que el operador R conmuta con el Hamiltoniano total $H = H_0 + W$. Determine los autoestados de H . ¿Está localizado el estado fundamental?

- (c) Suponga que inicialmente a $t = 0$ el electrón está localizado en el átomo 1. Halle la probabilidad de que el electrón esté localizado en el átomo n -ésimo a un tiempo $t > 0$ posterior.

P5 Efecto Zeno Cuántico.^{1,2,3} El “efecto Zeno cuántico” (también conocido como “paradoja de Turing”) es una característica de los sistemas cuánticos que dice que si se “observa” (en el sentido de medir) un sistema continuamente, entonces éste nunca evolucionará temporalmente. Para mostrar el efecto, considere un sistema que inicialmente a $t = 0$ se encuentra en un autoestado $|a\rangle$ con autovalor a de un dado observable A . El sistema además evoluciona temporalmente de acuerdo a un Hamiltoniano H .

- (a) Suponga que a un tiempo $t > 0$ se mide el observable A sobre el sistema. Muestre que para tiempos suficientemente pequeños ($t \ll 1$), la probabilidad de permanecer en el estado $|a\rangle$ está dada por

$$\text{Prob}(|a\rangle) \approx 1 - \frac{\text{Var}(E)t^2}{\hbar^2},$$

done $\text{Var}(E)$ es la varianza de energía en el estado inicial $|a\rangle$.

- (b) Considere ahora que se mide el observable A N veces entre $t = 0$ y $t = T$, en intervalos equiespaciados $\Delta t = T/N$. Muestre que en el límite en que se observa el sistema continuamente ($N \rightarrow \infty$), la probabilidad de que el sistema permanezca en el estado $|a\rangle$ a tiempo $t = T$ tiende a uno.

¹ Versión original en correspondencia privada de A. Turing.

² Review similar al ejercicio: B. Misra, E. C. G. Sudarshan, Journal of Mathematical Physics, 18, 756, (1977).

³ Realización experimental: W. M. Itano, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, Phys. Rev. A, 41, 2295 (1990).

II. Representación de Heisenberg

P6 Sean A , B y C tres operadores tales que $[A, B] = C$. Suponga además que el sistema evoluciona según un dado Hamiltoniano H . Muestre entonces que

$$[A(t), B(t)] = C(t),$$

donde $A(t)$ es el operador A evolucionado un tiempo t en la representación de Heisenberg (y análogamente para $B(t)$ y $C(t)$).

P7 Sea $x(t)$ el operador posición para una partícula libre en una dimensión ($H = p^2/2m$) en la representación de Heisenberg. Calcule el conmutador entre el operador de posición a dos tiempos distintos,

$$[x(t), x(0)].$$

¿Conmuta el operador posición a distintos tiempos?

P8 Considere nuevamente el problema de la precesión del spin. Utilizando el Hamiltoniano del problema **P2**, escriba las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para los operadores dependientes del tiempo $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$. Resuélvalas para obtener $S_x(t)$, $S_y(t)$ y $S_z(t)$ como funciones del tiempo y calcule los valores medios de estos operadores para un estado general cualquiera. En particular, compare el valor medio $\langle S_x(t) \rangle$ para el estado $|+, \hat{x}\rangle$ con el antes obtenido en el ejercicio **P2**.

- P9** “**Simetrías y Conservación**”. Sea $A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ un observable que conmuta con el Hamiltoniano. Muestre entonces que la probabilidad de medir los distintos resultados a_i es independiente del tiempo. Concluya entonces que, además, el valor medio de A también es constante en el tiempo. ¿Dependen estos resultados de la representación elegida?
- P10** Elija cualquier problema antes resuelto en la presentación de Schrödinger y repita los cálculos de probabilidades y/o valores medios en función del tiempo, pero ahora usando la representación de Heisenberg. Verifique que obtiene los mismos resultados, como debe ser.

III. Evolución temporal y sistemas mixtos

- P11** **Evolución temporal.** La evolución temporal de la matriz densidad ρ en la representación de Schrödinger está dada por

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0),$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal.

- Muestre que esta definición es consistente con la conocida para estados puros y discuta por qué la extensión al caso mixto tiene sentido en vista de la interpretación de ρ como mezcla estadística de estados.
- A partir de la ecuación diferencial que define al operador $U(t, t_0)$, encuentre la ecuación de evolución temporal para el operador densidad. Note las diferencias, tanto en la definición, como en la ecuación diferencial de evolución temporal, que hay entre la evolución temporal del operador ρ y la de un observable cualquiera en la representación de Heisenberg.
- Suponga que a $t = 0$ tiene un estado puro. Muestre que el estado no puede evolucionar a uno mixto si la evolución temporal está dada por una transformación unitaria (y por lo tanto si ρ satisface la ecuación de Schrödinger). En particular, muestre que la pureza de un estado permanece constante en el tiempo.

- P12** **Evolución temporal en la bola de Bloch.** Considere un sistema de spin $1/2$. En presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$, el Hamiltoniano del sistema se puede escribir como $H = \omega S_z$ (ver problema de precesión del spin de la guía de Dinámica). Encuentre el $\mathbf{P}(t)$ que corresponde a la matriz densidad evolucionada $\rho(t)$. Interprete el resultado.

IV. Dinámica en sistemas compuestos

- P13** Considere un sistema compuesto por dos grados de libertad A y B . Suponga que el sistema A posee un Hamiltoniano H_A y que B posee un Hamiltoniano H_B y, además, los dos grados de libertad no interactúan entre sí, de forma tal que el Hamiltoniano total es $H_{AB} = H_A \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_A \otimes H_B$. Suponga que inicialmente el sistema en un estado producto $|\Psi\rangle_{AB} = |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B$. Muestre entonces que el estado es producto a todo tiempo. ¿Puede un Hamiltoniano sin interacciones generar entrelazamiento?
- P14** **Interacción spin–spin.** Como hemos ya discutido en problemas y guías anteriores, una partícula con spin $1/2$ posee un momento magnético. Por lo tanto, si tenemos dos partículas de spin $1/2$, aún en ausencia de un campo externo, tendremos una energía interacción de entre ellas de tipo dipolo–dipolo magnético. En este problema consideraremos los efectos cualitativos de esta de interacción, estudiando una versión simplificada de la interacción dipolar magnética dada por el Hamiltoniano

$$H = J\sigma_z \otimes \sigma_z,$$

con J una constante con unidades de energía que depende de los momentos dipolares de las partículas y de la distancia entre ellas. No obstante aquí consideramos un único término de la verdadera interacción dipolar magnética, cabe notar que este Hamiltoniano más sencillo no solo nos permitirá obtener cualitativamente un comportamiento del sistema análogo al del caso general, sino que en muchas situaciones prácticas la interacción dipolar magnética se puede reducir a un Hamiltoniano efectivo de esta forma.

- Escriba una base de autoestados de este Hamiltoniano. ¿Cuál es el espectro de energías? ¿Está degenerado?

- (b) Suponga que inicialmente los dos spins se encuentran en el estado $|\Psi_0\rangle = |+, x\rangle \otimes |+, x\rangle$. Calcule entonces el estado a un tiempo posterior t , $|\Psi(t)\rangle$.
- (c) Evalúe en particular la forma del estado a un tiempo $T = \pi\hbar/(4J)$. ¿Qué tipo de estado es el estado inicial? ¿Y el estado a tiempo T ?
- (d) Calcule la matriz densidad reducida del primer spin en función del tiempo. En particular, calcule la pureza de esta matriz densidad y gráfiquela en función del tiempo. Analice e interprete la dinámica del entrelazamiento entre las partículas.
- (e) Suponga que se quiere describir la evolución temporal de la matriz densidad reducida del primer spin, sin hacer ninguna referencia al sistema global. ¿Puede ser esta evolución unitaria? ¿Por qué? ¿Vale la ecuación de Schrödinger para el primer spin por sí solo?

P15 **Modelo de medición de von Neumann de primer tipo (versión simplificada).** En el siguiente problema estudiaremos una versión simplificada del modelo de proceso de medición propuesto por von Neumann, en el que no sólo tendremos en cuenta el sistema a medir sino que también al aparato de medición, que se trata como un sistema cuántico adicional. La idea consiste en tratar de codificar los distintos valores y probabilidades del observable A que se quiere medir en una base de estados del aparato de medición que sean fácilmente distinguibles. En el ejemplo a estudiar, consideraremos el aparato de medición como un sistema de variable continua y utilizaremos su grado de libertad de posición para codificar la información deseada. Por simplicidad supondremos además que el observable A a medir es no degenerado, de forma tal que

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|, \quad a_i \neq a_j, \text{ si } i \neq j.$$

Denotaremos al sistema cuyo observable queremos medir como \mathcal{S} , mientras que el sistema del aparato de medición será \mathcal{M} , de forma tal que el sistema total estará representado por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$. Para realizar la medición se evoluciona al sistema compuesto según una transformación unitaria

$$U = e^{-i\lambda A \otimes p/\hbar},$$

donde p es el operador momento en \mathcal{M} y λ es una constante conocida.

- (a) Proponga un Hamiltoniano H del sistema total $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ tal que esta evolución unitaria corresponde a la evolución temporal por un cierto tiempo T .
- (b) Calcule la acción de la transformación U sobre el estado $|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$, donde $|x = x_0\rangle_{\mathcal{M}}$ es un autoestado de la posición de \mathcal{M} (estado no físico). ¿Cómo puede interpretar la acción de U ? ¿Puede inferir el valor del autovalor a_i a partir de la posición de \mathcal{M} ?
- (c) Supongamos que el sistema auxiliar se encuentra inicialmente en un estado Gaussiano, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$, centrado en el origen y con varianza σ , es decir tal que

$$\langle x|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\sigma^2}.$$

Calcule en tal caso $U|a_i\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. ¿Cómo puede interpretar la acción de U ? ¿Cuál es la densidad de probabilidad en posición del sistema \mathcal{M} luego de haber aplicado U ? ¿Puede inferir el valor de a_i a partir de esta densidad de probabilidad?

- (d) (*Opcional*) Suponga ahora que el estado inicial de \mathcal{S} es un estado general $|\psi\rangle_{\mathcal{S}} = \sum_i c_i |a_i\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_i si se mide A sobre $|\psi\rangle_{\mathcal{S}}$? Nuevamente el sistema auxiliar comienza en el mismo estado Gaussiano del ítem anterior, $|0, \sigma\rangle_{\mathcal{M}}$. Calcule el estado del sistema luego de la aplicación de U . ¿Cuál es la densidad de probabilidad de la posición de \mathcal{M} luego de la acción de U ? ¿Puede inferir los posibles valores de a_i y las probabilidades correspondientes? ¿Qué pasa en particular si se elige λ tal que $\lambda(a_{i+1} - a_i) \gg \sigma \forall i$?

P16 **El experimento de Stern–Gerlach.** Vamos a reconsiderar el experimento de Stern–Gerlach, agregando el grado de libertad de posición de los átomos (que hasta ahora solo consideramos cualitativamente). En presencia de un campo magnético \mathbf{B} , un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ tiene una energía de interacción

$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Para un spin tenemos que $\boldsymbol{\mu} = -|\mu| \mathbf{S}$ (con \mathbf{S} el operador de spin y $|\mu|$ una constante que depende de las propiedades de la partícula, como su masa, carga y el factor- g). Si estamos en una región del espacio donde $\mathbf{B} = B(z)\hat{\mathbf{z}}$ y además el gradiente del campo es aproximadamente constante, es decir $\frac{\partial B}{\partial z} \approx \text{cte}$, entonces el Hamiltoniano de interacción está dado por

$$H_{\text{int}} = -\mu B'_0 z \otimes \sigma_z, \quad B'_0 := \frac{\partial B}{\partial z} \approx \text{cte}.$$

En vista del problema anterior, ¿cómo puede interpretarse el efecto de la evolución temporal generada por H_{int} ? ¿Cómo puede interpretarse esto en términos del experimento de Stern-Gerlach?

P17 **Algoritmo de Bernstein–Vazirani.** El algoritmo de Bernstein–Vazirani es uno de los ejemplos más sencillos de algoritmo cuántico y además resulta particularmente interesante en cuanto es uno de los relativamente pocos casos donde se puede realmente demostrar formalmente una ventaja respecto del escenario equivalente clásico. Supongamos que se tiene una función f que toma como input cadenas binarias \mathbf{b} (por ejemplo $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$) de largo n y cuyo resultado es calcular el producto interno con otra cadena \mathbf{s} . Es decir, $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, tal que

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_n s_n.$$

La cadena \mathbf{s} está fija pero es desconocida. Efectivamente, dada una caja negra que calcula f (lo que formalmente se conoce como “oráculo”), nuestro objetivo es determinar quién es \mathbf{s} .

- Proponga una estrategia clásica para tratar de inferir el valor de \mathbf{s} . ¿Cuántas evaluaciones de f (es decir cuántas interrogaciones al oráculo) requiere su estrategia? Se puede demostrar que clásicamente se requiere por lo menos de n evaluaciones de f .
- Considere ahora el escenario cuántico. En tal caso, la caja negra que calcula f es una unitaria U_f que actúa sobre un sistema de n qubits (sistemas de dimensión 2) de forma tal que si $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es una base ortonormal de cada qubit, entonces

$$U_f |\mathbf{b}\rangle = U_f (|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \otimes \dots \otimes |b_n\rangle) = (-1)^{f(\mathbf{b})} |\mathbf{b}\rangle.$$

Luego, consideremos el siguiente algoritmo: (i) partimos con los n qubits en el estado $|\mathbf{0}\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$, (ii) aplicar Hadamard a cada qubit, (iii) aplicar U_f , (iv) aplicar Hadamard a cada qubit, (v) medir cada qubit en la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Muestre entonces que, con una única aplicación de U_f (es decir una única interrogación al oráculo), es posible determinar el valor de \mathbf{s} .

Recordatorio: La operación Hadamard es la unitaria sobre un qubit $H = (\sigma_z + \sigma_x)/\sqrt{2}$.