Fìsica Teórica 2 – 1er. cuatrimestre de 2022 – Primer parcial (19/05/2022)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto. Poner una dirección de gmail en el pdf.)

P1 Considere un sistema de dimensión cuatro, y una base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, |u_4\rangle\}$. En este base el Hamiltoniano H y dos observables O_1 y O_2 están dados por

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad O_1 = o_1(|u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_4| + |u_4\rangle\langle u_3|), \begin{cases} O_2 |u_1\rangle = o_2 |u_1\rangle \\ O_2 |u_2\rangle = o_2 |u_4\rangle \\ O_2 |u_3\rangle = o_2 |u_3\rangle \\ O_2 |u_4\rangle = o_2 |u_2\rangle \end{cases},$$

donde ω, o_1 y o_2 son constantes reales y positivas. El estado inicial del sistema es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}} |u_3\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}} |u_4\rangle .$$

(a) Determine por cálculo o justificando los operadores que conmutan entre sí. Para esos operadores proponga una base común ¿Se puede formar un CCOC a partir de estos operadores? En caso contrario, proponga un tercer observable O_3 que permite formar un CCOC.

(b) A $t = 0$ ¿Qué valores espera obtener al medir el observable O_2, y con qué probabilidad? Calcule el valor medio y la varianza de O_2 a $t = 0$.

(c) Obtenga el estado $|\psi(t)\rangle$ y calcule la probabilidad de obtener o_1 al medir el observable O_1 al tiempo t .

(d) Se hace una medición de O_1 a $t = 0$ y se obtiene $-o_1$, luego de la medición el sistema evoluciona con el Hamiltoniano H ¿cuál es el menor tiempo τ para que se vuelva a medir este valor con certeza?

P2 Dada una partícula de spin 1/2, se definen dos estados $|\pm\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle \pm \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle$, siendo $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ los autoestados de σ_z con autovalores ± 1.

(a) Dibuje estos estados en la esfera de Bloch. Calcule $\langle\theta|-\theta\rangle$. ¿Para qué valor de θ los estados son ortogonales?. Calcule los valores medios de σ_x para los estados $|\theta\rangle$ y $|-\theta\rangle$.

Ahora considere un sistema compuesto por dos partículas de spin 1/2, denotadas 1 y 2, cuya matriz densidad es

$$\rho_{12} = p\,|\theta\theta\rangle\langle\theta\theta| + (1-p)\,|-\theta-\theta\rangle\langle-\theta-\theta| ,$$

con $0 \leq p \leq 1$, usamos $|\pm\theta \pm \theta\rangle \equiv |\pm\theta\rangle_1 \otimes |\pm\theta\rangle_2$ y $|\pm\theta\rangle$ son los definidos en el punto anterior.

(b) Calcule la pureza del estado en función de p y θ. ¿En qué casos es el estado puro?. Grafique cualitativamente la pureza para el caso $p = 1/2$, en función de θ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Interprete.

(c) Calcule las matrices densidad reducidas ρ_1 y ρ_2. Para el caso en que el estado global es puro, ¿es el estado entrelazado o no? (justifique).

(d) Calcule el valor de expectación de la medición de σ_z sobre cada partícula y el del observable $\sigma_z \otimes \sigma_z$ sobre el sistema compuesto. Calcule la función de correlación $K(z,z) := \langle\sigma_z \otimes \sigma_z\rangle_{12} - \langle\sigma_z\rangle_1 \langle\sigma_z\rangle_2$. Interprete.

P3 El Hamiltoniano de una partícula sin spin se escribe:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \hbar\lambda\left({a^\dagger}^2 + a^2\right)$$

siendo $\{a, a^\dagger\}$ los usuales operadores de bajada y subida del oscilador armónico en 1D para la partícula de masa m y oscilador de frecuencia ω. Introduciendo los operadores $b = N(a + \sigma a^\dagger)$ y $b^\dagger = N(a^\dagger + \sigma a)$ con σ real (transformación de Bogoliubov):

(a) Calcule el valor real $N > 0$ que preserva las relación de conmutación: $[b, b^\dagger] = 1$.

(b) Determine el valor de $\sigma(\lambda, \omega)$ y $\Omega(\omega, \sigma)$ tal que el nuevo Hamiltoniano sea:

$$H = \hbar\Omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)$$

Ayuda: Parta de esta ecuación e iguale al H original, encuentre y resuelva una ec. cuadrática para σ ($\sigma < 1$), no haga más de lo que se pide (puede asumir que las ecs. son consistentes).

(c) Determine los autovalores de H (niveles de energía), y calcule el estado fundamental en las representaciones de posición y de momento (no es necesario normalizar). Deduzca $\Delta^2 x$ y $\Delta^2 p$ para el estado fundamental. ¿Es mínimo el producto de incertezas? Discuta.

(d) Determine la evolución temporal en la representación de Heisenberg de $a(t)$ y $a^\dagger(t)$. **Ayuda:** Puede usar que $a = N(b - \sigma b^\dagger)$.