Dinámica: esquema de Heisenberg

Hasta ahora, dado $|\psi_0\rangle$ a $t=0$ $\xrightarrow{U}$ $|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle$

Vimos que dado un observable $\hat{A}$, $\langle \hat{A}(t)\rangle = \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle$

Pero como $|\psi(t)\rangle = U|\psi_0\rangle \Rightarrow \langle A(t)\rangle = \langle\psi_0|\underbrace{U^+ A U}_{\hat{A}_H(t)}|\psi_0\rangle$

$\hat{A}_H(t)$: En el esquema de Heisenberg se supone que lo que evolucionan son los estados, no los operadores.

- ESQUEMA O REPRESENTACIÓN DE HEISENBERG:

$|\psi\rangle_H = |\psi_0\rangle$

$A_H(t) = U A_s U$, donde A_H evoluciona según:

$$\dot{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[A_H(t), H\right] + \cancel{\left(\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)_H}$$ → Suponemos que nuestro op. $\hat{A}$ no depende explícitamente de t.

$$\dot{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[A_H(t), H\right] \underset{\text{v. ej ⑥}}{=} \frac{1}{i\hbar}\left(\left[A_s, H\right]\right)_H$$

Si $[A_s, H] = B \Rightarrow \dot{A}_H = \frac{1}{i\hbar}B_H(t)$ → Veo qué evolución tiene B_H:

$$\dot{B}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\Big(\underbrace{[B_s, H]}_{C}\Big)_H = \frac{1}{i\hbar}C_H(t), \text{ etc.}$$

Normalmente estas ecuaciones se detienen en un dado punto y puedo resolver el problema.

Veamos algún ejemplo,

(13) Resolver el problema de la precesión de espín en el esquema de HEISEN

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z \quad \text{con} \quad \omega \overset{\text{Si } q<0}{=} \frac{g|q|B}{2m}, \quad |q| = |e|$$

$$H = \underbrace{-\bar{\mu}}_{\mu \bar{S}} \cdot \bar{B}$$

• Calcular $S_{z_H}(t)$, $S_{x_H}(t)$ y $S_{y_H}(t)$

$$\dot{\hat{S}}_{z_H}(t) = \frac{-i}{\hbar}\left([S_z, H]\right)_H = 0 \Rightarrow \hat{S}_{z_H}(t) = cte = \hat{S}_z$$

$$\dot{\hat{S}}_{x_H}(t) = \frac{1}{i\hbar}\left([S_x, H]\right)_H = \frac{\omega}{i\hbar}\left([S_x, S_z]\right)_H = \frac{\omega}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{4}\left(\overbrace{[\sigma_x, \sigma_z]}^{-2i\sigma_y}\right)_H$$

$$\dot{\hat{S}}_{x_H}(t) = -\omega \cancel{\hbar} S_{y_H}(t) \quad (1)$$

$$\dot{S}_{y_H}(t) = \frac{\omega}{i\hbar}\left(\underbrace{[S_y, S_z]}_{i\hbar S_x}\right)_H = \omega \hat{S}_{x_H}(t) \quad (2)$$

Derivo (1) y uso (2) $\ddot{S}_{x_H}(t) = -\omega \dot{S}_{y_H}(t) = -\omega^2 S_{x_H}(t)$

$$\therefore \begin{cases} \hat{S}_{x_H}(t) = \hat{A}\cos(\omega t) + \hat{B}\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ \hat{S}_{y_H}(t) = \dfrac{\dot{\hat{S}}_{x_H}(t)}{-\omega} = \hat{A}\,\mathrm{sen}(\omega t) \cancel{\mp} B\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\hat{S}_{x_H}(0) = S_x \Rightarrow \boxed{\hat{A} = S_x}$$

$$\dot{\hat{S}}_{x_H}(0) = -\omega \hat{S}_y = +B\omega \Rightarrow \boxed{\hat{S}_y = -B}$$

$S_{xH}(t) = \hat{S}_x \cos(\omega t) \mp S_y \sin(\omega t)$

$S_{yH}(t) = \hat{S}_y \cos(\omega t) + S_x \sin(\omega t)$

El estado más general posible es:

$|\psi_0\rangle = |+,\hat{m}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle - e^{i\alpha} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle$

$\langle S_{zH}(t)\rangle = \langle\psi_0|\underbrace{\hat{S}_{zH}(t)}_{\hat{S}_z}|\psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underbrace{\frac{\hbar}{2}\cos(\theta)}$

Proyección del espín sobre θ

¡Queda poco más. hacer los demás cuentas!

Tomemos un caso particular

$|\psi_0\rangle = |+,\hat{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

$\langle S_x(t)\rangle = \langle +,\hat{x}|\hat{S}_{xH}(t)\underbrace{|+,\hat{x}\rangle}_{|\psi_0\rangle} = \langle +,\hat{x}| -S_y \sin(\omega t) + S_x \cos(\omega t)|+\hat{x}\rangle$

$\langle S_x(t)\rangle = \langle +,\hat{x}|\underbrace{\hat{S}_x|+,\hat{x}\rangle}_{+\frac{\hbar}{2}|+,\hat{x}\rangle} \cos(\omega t) - \overbrace{\langle +,\hat{x}|\underbrace{\hat{S}_y|+,\hat{x}\rangle}}^{=0} \sin(\omega t)$

$\downarrow \frac{\hbar}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(|-\rangle - |+\rangle) = \frac{\hbar}{2}i(-|-\hat{x}\rangle)$

$\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y|+,\hat{x}\rangle = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$\sigma_y|+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i|-\rangle$

$\sigma_y|-\rangle = -i|+\rangle$

$\Rightarrow \boxed{\langle S_x(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)}$

$\langle S_y(t)\rangle = \langle +,\hat{x}|\hat{S}_y \cos(\omega t) + \hat{S}_x \sin(\omega t)|+,\hat{x}\rangle$

$\langle S_y(t)\rangle = \underbrace{\langle +,\hat{x}|\hat{S}_y|+,\hat{x}\rangle}_{=0} \cos(\omega t) + \underbrace{\langle +,\hat{x}|S_x|+,\hat{x}\rangle}_{\hbar/2} \sin(\omega t)$

$\boxed{\langle S_y(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin(\omega t)}$

$\langle S_z(t)\rangle = \langle +,\hat{x}|\underbrace{\hat{S}_z|+,\hat{x}\rangle}_{(\hbar/2)\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)} = \boxed{0 = \langle S_z(t)\rangle}$

- Mismos resultados que en P2.
- Las conclusiones físicas no dependen de la representación usada.