Operador desplazamiento en el espacio de fases

Juani Gargano

5 de mayo de 2023

(Problema 5) *Se define el operador de desplazamiento en el espacio de fases como*

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)},$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) *Muestre que* $D(\alpha)$ *es unitario y además* $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.
Tenemos que $D^{-1}(\alpha) = e^{-(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = e^{(\alpha^* a - \alpha a^\dagger)} = D^\dagger(\alpha)$, y en el medio vimos que $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) *Muestre que* $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}$.
Recordemos la fórmula de HCB: Si A y B son operadores que conmutan con $[A,B]$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{1}$$

Notar que $[\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a] = \alpha\beta^*[a^\dagger, a] - \alpha^*\beta[a, a^\dagger] \overset{[a,a^\dagger]=1}{=} -2i\,\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)\mathrm{id} = 2i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\mathrm{id}$, que es un operador escalar, así que conmuta con los otros dos. Del lado derecho tenemos entonces

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a + \beta a^\dagger - \beta^* a + i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)} = e^{(\alpha+\beta)a^\dagger - (\alpha+\beta)^* a + i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)} = D(\alpha+\beta)e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}.$$

(c) *Muestre que*

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \qquad D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*,$$
$$D^\dagger(\alpha) x D(\alpha) = x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,2\,\mathrm{Re}\,\alpha, \qquad D^\dagger(\alpha) p D(\alpha) = p + \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,2\,\mathrm{Im}\,\alpha.$$

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = D^\dagger(\alpha)D(\alpha)a - D^\dagger(\alpha)[D(\alpha), a] \overset{[f(A),B]=\frac{df}{dA}[A,B]}{=} a - D^\dagger(\alpha)D(\alpha)[(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), a] = a + \alpha.$$

El segundo sale tomándole daga al primero, y los demás quedan de ejercicio.

(d) *Muestre que el estado* $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ *es autoestado del operador de aniquilación* a. *¿Cuál es el autovalor correspondiente? ¿Qué tipo de estado es* $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$*?*

$$a|\alpha\rangle = aD(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)(a+\alpha)|0\rangle = \alpha D(\alpha)|0\rangle.$$

Por lo tanto, el estado $|\alpha\rangle$ es autovalor de a, es decir, es un **estado coherente**. De acá vemos que el operador $D(\alpha)$ es el generador de estados coherentes.

(e) *Muestre que la acción de* $D(\alpha)$ *sobre el autoestado* $|0\rangle$ *de energía satisface*

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle.$$

Luego, expanda $e^{\alpha a^\dagger}$ *en serie de potencias y encuentre la expansión del estado* $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ *en la base de autoestados de energía,* $\{|n\rangle\}$*. Compare con lo obtenido en el ejercicio* $\boxed{\textbf{\textit{P4}}}$.

Ya vimos que el operador del problema genera los estados coherentes, ¿qué forma tienen respecto del estado de vacío $|0\rangle$?Usando (1) de vuelta, tenemos

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger + (-\alpha^* a) + \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha|^2} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a},$$

Por lo que, al evaluar en $|0\rangle$,

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} \underbrace{e^{-\alpha^* a}|0\rangle}_{=\mathrm{id}\,|0\rangle} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle.$$

Expandiendo la exponencial, queda

$$\begin{aligned} D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} \sqrt{n!} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned}$$

que es exactamente lo que se obtuvo en el problema anterior.

(f) *Evalúe $D(\alpha)$ para los casos particulares en que (i) α es real, y (ii) α es imaginario puro. ¿Qué operadores se obtienen en tales casos? Y para el caso de α complejo arbitrario, ¿cómo puede extender esta interpretación del operador $D(\alpha)$?*
Si $\alpha = c + id$, por el item (b),

$$D(\alpha) = D(c)D(id)e^{-i\,\mathrm{Im}(c(-id))} = e^{icd} D(c)D(id).$$

Viendo simplemente la definición de $D(\alpha)$, y reemplazando las partes real e imaginaria en términos de los valores medios (item siguiente),

$$D(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x\rangle\langle p\rangle} e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x\rangle p} e^{\frac{i}{\hbar}\langle p\rangle x} = e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x\rangle\langle p\rangle} T_x(\langle x\rangle) T_p(\langle p\rangle),$$

donde los valores medios son tomados en el estado coherente. Entonces,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\langle x\rangle\langle p\rangle} T_x(\langle x\rangle) T_p(\langle p\rangle)|0\rangle.$$

Esto significa que los estados coherentes consisten en traslaciones en espacio y momento del estado de vacío. En el item siguiente vemos que verdaderamente se shiftean los valores medios de la posición y el momento. Si al estado lo hacemos evolucionar cumplirá una ecuación de este estilo

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle.$$

Si tomamos la representación de posición, obtenemos una ecuación diferencial

$$\langle x|a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\langle x|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\psi^\alpha(x,t),$$

donde $a = \tilde{x} + i\tilde{p}$ y conocemos su acción en la representación de momento. Si resolvemos esta ecuación diferencial, veremos que la solución es un paquete gaussiano cuya densidad de probabilidad oscila como una partícula clásica. `https://en.wikipedia.org/wiki/Coherent_state`.

(g) *Utilizando cómo transforman x y p ante la acción de $D(\alpha)$, calcule el valor medio y varianza de posición y momento en los estados coherentes.*
Usando los resultados anteriores:

$$D^\dagger(\alpha) x D(\alpha) = x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\,\mathrm{Re}\,\alpha, \;\; D^\dagger(\alpha) p D(\alpha) = p + \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} 2\,\mathrm{Im}\,\alpha,$$

por lo que

$$\langle x\rangle_{|\alpha\rangle}=\langle x\rangle_{|0\rangle}+\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\,\mathrm{Re}\,\alpha,\ \langle p\rangle_{|\alpha\rangle}=\langle p\rangle_{|0\rangle}+\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}2\,\mathrm{Im}\,\alpha.$$

Por lo tanto aplicar la transformación $D(\alpha)$ cambia los valores medios del estado fundamental. Usando las otras relaciones del item (c) se puede ver que

$$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\langle x\rangle_{|\alpha\rangle}+i\frac{\langle p\rangle_{|\alpha\rangle}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}.$$

Queda como ejercicio ver que

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_{|\alpha\rangle}=\hbar^2/4=\langle(\Delta p)^2\rangle_{|\alpha\rangle},$$

y por lo tanto, los estados coherentes saturan la relación de incerteza (y de manera balanceada). Sin embargo, hay una manera rápida de ver que saturan la relación de incerteza. En efecto, a menos de constantes, $a=x+ip$. Si tomamos un estado coherente $|\alpha\rangle$, es decir, un autoestado de a, $a|\alpha\rangle=(x+ip)|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$. Por lo tanto, $\langle(x+ip)\rangle_{|\alpha\rangle}=\alpha$ y

$$0=(x+ip-\langle(x+ip)\rangle_{|\alpha\rangle})|\alpha\rangle=(x-\langle x\rangle_{|\alpha\rangle}+i(p-\langle p)\rangle_{|\alpha\rangle})|\alpha\rangle),$$

y en definitiva

$$(x-\langle x\rangle_{|\alpha\rangle})|\alpha\rangle=-i(p-\langle p)|\alpha\rangle,$$

para cualquier estado coherente. Por lo tanto, éstos saturan la relación de incerteza, por la equivalencia vista en una guía anterior.