Ejercicio 7 guía 6

Bruno Sivilotti

Mayo 2023

1. Enunciado

Considere un oscilador en un estado inicial formado por una superposición de dos estados coherentes; $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |{-\alpha}\rangle)$.

(a) Calcule el factor de normalización N.

(b) Calcule y grafique cualitativamente las densidades de probabilidad $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$. ¿Cómo cambian en función del tiempo?

(c) Calcule los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ en función del tiempo.

2. Resolución

a) La cuenta para calcular el factor de normalización es directa, pedimos que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ y despejamos N.

$$\begin{aligned}
1 = \langle\psi|\psi\rangle &= N^*(\langle\alpha| + \langle-\alpha|)N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \\
&= |N|^2[\langle\alpha|\alpha\rangle + \langle\alpha|-\alpha\rangle + \langle-\alpha|\alpha\rangle + \langle-\alpha|-\alpha\rangle] \\
&= |N|^2[1 + \langle\alpha|-\alpha\rangle + \langle-\alpha|\alpha\rangle + 1]
\end{aligned}$$

Y recordando del ejercicio 4i) que el producto interno entre dos estados coherentes $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ es

$$\langle\alpha|\beta\rangle = exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha\beta^*)\right]$$

queda

$$\begin{aligned}
1 = |N|^2 &\left[2 + exp\left(-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |-\alpha|^2 - 2\alpha(-\alpha)^*)\right) + exp\left(-\frac{1}{2}(|-\alpha|^2 + |\alpha|^2 - 2(-\alpha)(\alpha)^*)\right)\right] \\
&= |N|^2\left[2 + exp\left(-\frac{1}{2}4|\alpha|^2\right) + exp\left(-\frac{1}{2}4|\alpha|^2\right)\right] \\
&= |N|^2\left[2 + 2exp\left(-2|\alpha|^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Por lo cual
$$|N| = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+e^{-2|\alpha|^2}\right)}}.$$
Y sabemos que los estados cuánticos están definidos a menos de una fase global por lo que podemos tirar el módulo
$$\boxed{N = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+e^{-2|\alpha|^2}\right)}}.} \tag{1}$$
b) Queremos calcular la densidad de probabilidad de nuestro estado $|\psi\rangle$ en la base posición y en la base momento, para eso primero calculemos la funcion de onda en la base posición.

$$\begin{aligned}\psi(x) = \langle x|\psi\rangle &= \langle x|N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)\rangle \\ &= N\left[\langle x|\alpha\rangle + \langle x|-\alpha\rangle\right] \\ &= N\left[\phi_\alpha(x) + \phi_{-\alpha}(x)\right]\end{aligned}$$

y recordamos que la función de onda de un estado coherente en la base posición es[1]

$$\phi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma\sqrt{\pi}}} exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) exp\left(i\frac{xp_\alpha}{\hbar}\right) exp\left(-i\frac{x_\alpha p_\alpha}{2\hbar}\right)$$

donde $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{mw}}$, $x_\alpha = \sqrt{2}\sigma Re(\alpha)$ y $p_\alpha = \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sigma} Im(\alpha)$.

La densidad de probabilidad en la base posición es entonces

$$\begin{aligned}|\langle x|\psi\rangle|^2 &= \psi(x)\psi(x)^* \\ &= |N|^2\left[\phi_\alpha(x) + \phi_{-\alpha}(x)\right]\left[\phi^*_\alpha(x) + \phi^*_{-\alpha}(x)\right] \\ &= |N|^2\left[|\phi_\alpha(x)|^2 + |\phi_{-\alpha}(x)|^2 + \phi_\alpha(x)\phi^*_{-\alpha}(x) + \phi_{-\alpha}(x)\phi^*_\alpha(x)\right].\end{aligned}$$

Y es facil ver que

$$|\phi_{\pm\alpha}|^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} exp\left(-\frac{(x\mp x_\alpha)^2}{\sigma^2}\right).$$

Con lo cual la densidad de probabilidad queda

$$\begin{aligned}|\langle x|\psi\rangle|^2 = \frac{|N|^2}{\sigma\sqrt{\pi}}\Bigg\{ & exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2}{\sigma^2}\right) + exp\left(-\frac{(x+x_\alpha)^2}{\sigma^2}\right) \\ & + exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2+(x+x_\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)\left[exp\left(i\frac{2xp_\alpha}{\hbar}\right) + exp\left(-i\frac{2xp_\alpha}{\hbar}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\boxed{|\langle x|\psi\rangle|^2 = \frac{|N|^2}{\sigma\sqrt{\pi}}\left\{exp\left(-\frac{(x-x_\alpha)^2}{\sigma^2}\right) + exp\left(-\frac{(x+x_\alpha)^2}{\sigma^2}\right) + 2.exp\left(-\frac{x^2+x_\alpha^2}{\sigma^2}\right) cos\left(\frac{2xp_\alpha}{\hbar}\right)\right\}}$$

Se puede observar que los primeros dos términos se corresponden a las gaussianas correspondientes a los estados $|\alpha\rangle$ y $|-\alpha\rangle$ respectivamente, y el último término da cuenta de la interferencia entre

[1] Esto está demostrado en la sección 9.3.6 del apunte de la teórica.

ambos estados debido a la superposición. Las gaussianas están centradas en x_α y $-x_\alpha$ y el término de interferencia es máximo en $x = 0$. Si x_α es grande, el término de interferencia es despreciable y el gráfico resultante es simplemente la superposición de las dos gaussianas, como se observa en la 1. En cambio, a medida que x_α decrece, el término de interferencia aumenta y las gaussianas dejan de resolverse por separado, por lo que se producen oscilaciones alrededor de $x = 0$.

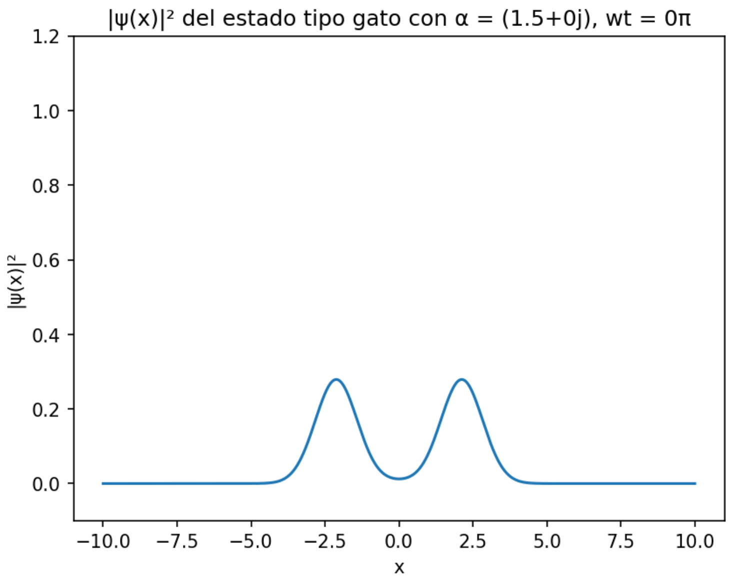

Figura 1: Densidad de probabilidad en posición del estado tipo gato a tiempo cero.

La densidad de probabilidad en la base momento se calcula analogamente usando que la función de onda de un estado coherente en la base momento es

$$\phi_\alpha(p) = \langle p|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\sigma}{\hbar\sqrt{\pi}}} exp\left(-\frac{\sigma^2(p-p_\alpha)^2}{\hbar^2}\right) exp\left(-i\frac{px_\alpha}{\hbar}\right) exp\left(-i\frac{x_\alpha p_\alpha}{2\hbar}\right)$$

lo cual se puede deducir igual que se dedujo la función de onda en la base posición.

Con esto, y repitiendo el procedimiento, la densidad de probabilidad en la base momento es

$$\boxed{|\langle p|\psi\rangle|^2 = \frac{|N|^2\sigma}{\hbar\sqrt{\pi}}\left\{exp\left(-\frac{2\sigma^2(p-p_\alpha)^2}{\hbar^2}\right) + exp\left(-\frac{2\sigma^2(p+p_\alpha)^2}{\hbar^2}\right) + 2.exp\left(-\frac{2\sigma^2(p^2+p_\alpha^2)}{\hbar^2}\right) cos\left(\frac{2px_\alpha}{\hbar}\right)\right\}}$$

Para responder a la pregunta de cómo varían estas densidades en función del tiempo recordamos que la dependencia temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ aparece como una variación temporal del parámetro α.

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha e^{-iwt}\\ &= |\alpha| e^{-i(wt-\theta_\alpha)}\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \sqrt{2}\sigma[Re(\alpha)cos(wt) + Im(\alpha)sen(wt)] \\ &= \sqrt{2}\sigma|\alpha|cos(wt - \theta_\alpha) \\ p_\alpha(t) &= \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sigma}[Im(\alpha)cos(wt) - Re(\alpha)sen(wt)] \\ &= -\frac{\sqrt{2}\hbar}{\sigma}|\alpha|sen(wt - \theta_\alpha) \end{aligned}$$

Es decir que $x_\alpha(t)$ y $p_\alpha(t)$ van a oscilar armónicamente alrededor del cero. Insertando esta variación temporal en las expresiones para la densidad se observa el comportamiento ilustrado en la Fig.2. En la misma se ve que ambos lóbulos gaussianos oscilan alrededor de x=0 y al superponerse generan un patrón de interferencia.

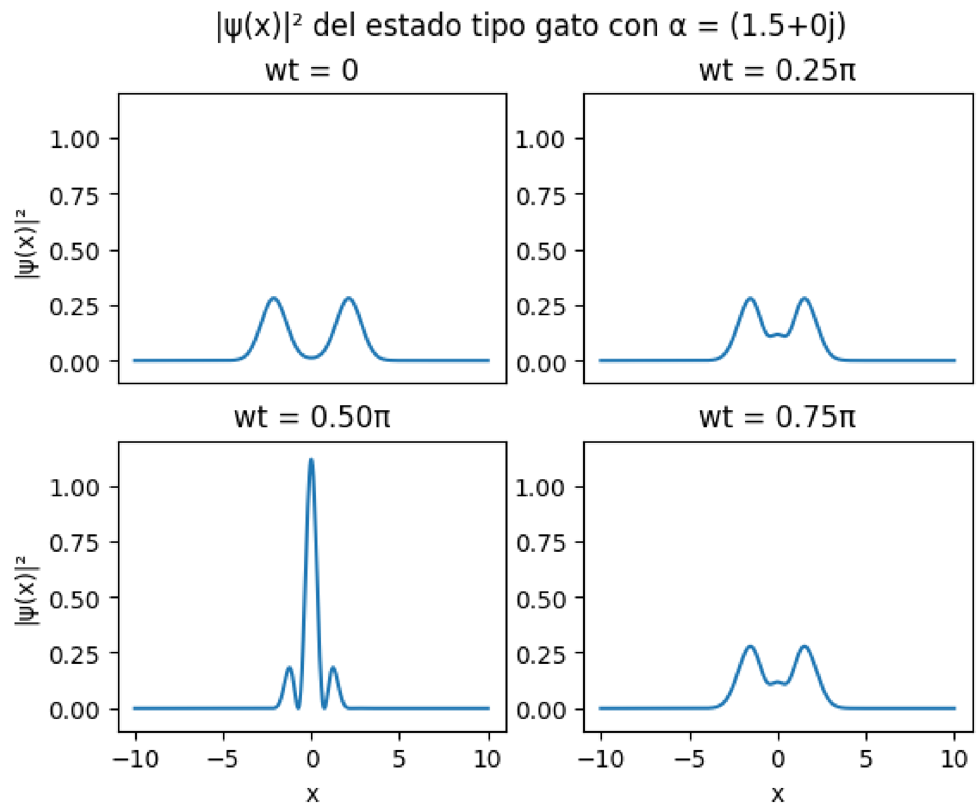

Figura 2: Evolución temporal de la densidad de probabilidad en posición del estado tipo gato.

c) Ahora queremos calcular $\langle x \rangle (t)$ y $\langle p \rangle (t)$. La dependencia temporal, al igual que en el inciso anterior aparecerá en el alpha. Antes de hacer ninguna cuenta pueden sospechar cuál va a ser el resultado. De las figuras y de las expresiones para $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$ queda en evidencia que las densidades de probabilidad son funciones pares para todo tiempo, es decir que el valor medio de posición y de momento debería ser cero para todo tiempo. Corroboremos esto haciendo las cuentas.

$$\langle x\rangle(t) = \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = |N|^2 \left\langle (\langle\alpha(t)| + \langle-\alpha(t)|)x(|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)\right\rangle$$
$$= |N|^2 \left[\langle\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle\right]$$
$$= |N|^2 \left[\langle x\rangle_{\alpha(t)} + \langle x\rangle_{-\alpha(t)} + \langle\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle\right]$$
$$= |N|^2 \left[x_\alpha(t) - x_\alpha(t) + \langle\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle\right]$$
$$= |N|^2 \left[\langle\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle\right]$$

Donde en el paso del renglón 3 al 4 usamos que el valor medio de la posición de los estados $|\pm\alpha(t)\rangle$ es $x_{\pm\alpha(t)} = \pm x_{\alpha(t)}$.

Para calcular los dos elementos de matriz que nos quedaron en la expresión recordamos que $x = \frac{\sigma}{2}(a + a^\dagger)$ y que los estados coherentes son autoestados del operador a con autoestado $\alpha(t)$. De esta forma

$$\langle\pm\alpha(t)|x|\mp\alpha(t)\rangle = \frac{\sigma}{2}\langle\pm\alpha(t)|a + a^\dagger|\mp\alpha(t)\rangle$$
$$= \frac{\sigma}{2}\langle\pm\alpha(t)|a|\mp\alpha(t)\rangle + \frac{\sigma}{2}\langle\pm\alpha(t)|a^\dagger|\mp\alpha(t)\rangle$$
$$= \frac{\sigma}{2}(\mp\alpha(t) \pm \alpha^*(t))\langle\pm\alpha(t)|\mp\alpha(t)\rangle$$
$$= \frac{\sigma}{2}(\mp\alpha(t) \pm \alpha^*(t))exp\left(-2|\alpha(t)|^2\right)$$

Donde en el último paso usamos la expresión para el producto interno de dos estados coherentes que ya usamos en el inciso a).

Metiendo esto en la expresión que nos había quedado para $\langle x\rangle(t)$

$$\langle x\rangle(t) = |N|^2 \left[\langle\alpha(t)|x|-\alpha(t)\rangle + \langle-\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle\right]$$
$$= |N|^2\frac{\sigma}{2}\left[(-\alpha(t) + \alpha^*(t))exp\left(-2|\alpha(t)|^2\right) + (+\alpha(t) - \alpha^*(t))exp\left(-2|\alpha(t)|^2\right)\right] = 0$$

Analogamente se puede ver que $\langle p\rangle(t) = 0$.