Ejercicio 4 guía 7

Bruno Sivilotti

Mayo 2023

1. Enunciado

Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D(\hat{z}, \alpha)D(\hat{y}, \alpha)D(\hat{z}, \gamma)$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned} D^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= exp\left(\frac{-i\sigma_z\alpha}{2}\right) exp\left(\frac{-i\sigma_y\beta}{2}\right) exp\left(\frac{-i\sigma_z\gamma}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}sen(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}sen(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}cos(\beta/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

2. Resolución

a) Hay dos formas de resolver este inciso. La primera (que les queda de ejercicio a ustedes) es pensar en armar la matriz de la transformación lineal dada por D. Para esto recordamos que la matriz de una transformación lineal f en la base $B = \{v_1, v_2\}$ es

$$[f]_{BB} = \begin{pmatrix} | & | \\ [f(v_1)]_B & [f(v_2)]_B \\ | & | \end{pmatrix}$$

Donde $[f(v_1)]_B$ denota al vector columna de las coordenadas en la base B de $f(v_1)$. En notación de Dirac, la representación de la rotación para splin 1/2 es entonces:

$$D^{(1/2)} = \begin{pmatrix} \langle +| D |+\rangle & \langle +| D |-\rangle \\ \langle -| D |+\rangle & \langle -| D |-\rangle \end{pmatrix}$$

y pueden calcular los distintos elementos de matriz expresando cada una de las rotaciones como indica el ejercicio 2b de esta guía:

$$D^{(1/2)}(\hat{\mathbf{n}}, \phi) = exp\left(\frac{-i\mathbf{S}.\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) = \mathbf{1}cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}.\hat{\mathbf{n}})\,sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{1}$$

La forma en la que lo vamos a hacer nosotros es más directa. Vamos a representar cada una de las rotaciones como nos indica la expresión (1) y luego multiplicaremos las matrices.

$$D^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = exp\left(\frac{-i\sigma_z\alpha}{2}\right) exp\left(\frac{-i\sigma_y\beta}{2}\right) exp\left(\frac{-i\sigma_z\gamma}{2}\right)$$
$$= \left[\mathbf{1}cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma_z}sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[\mathbf{1}cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma_y}sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\left[\mathbf{1}cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\boldsymbol{\sigma_z}sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\beta/2) & -sin(\beta/2) \\ sin(\beta/2) & cos(\beta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\beta/2)e^{-i\gamma/2} & -sin(\beta/2)e^{i\gamma/2} \\ sin(\beta/2)e^{-i\gamma/2} & cos(\beta/2)e^{i\gamma/2}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}sen(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}sen(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}cos(\beta/2)\end{pmatrix}$$

Como queríamos ver.

b) Para este inciso, recordamos que en el ejercicio (2c) obtuvimos la expresión de una rotación genérica de un ángulo ϕ a lo largo de un eje $\hat{\mathbf{n}}$ como

$$\begin{pmatrix} cos(\phi/2) - in_z sin(\phi/2) & (-in_x - n_y)sen(\phi/2) \\ (-in_x + n_y)sen(\phi/2) & cos(\phi/2) + in_z sin(\phi/2)\end{pmatrix} \tag{2}$$

Por lo tanto, para resolver este inciso igualamos la matriz (2) con la matriz de la composición de las 3 rotaciones del inciso (a) y tenemos 4 ecuaciones para las 4 variables n_x, n_y, n_z y ϕ. Se resuelve el sistema y listo.