P16 Tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q

$$Q_{ik} = q\,(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2)$$

Se conoce $Q = \langle \alpha, j, m=j \,|\, \underbrace{Q_{zz}}_{q(3z^2 - r^2)} \,|\, \alpha, j, m=j \rangle$

Para usar el Teorema de W-E, hay que escribir lo que le queremos calcular su valor de expectación en términos de Tensores irreducibles. Recordar que

Tensorial A de rango k_1, B de rango k_2 $\Rightarrow$ $\boxed{T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} \langle k_1, k_2 ; q_1, q_2 \,|\, k_1, k_2, k ; q \rangle A_{q_1}^{(k_1)} B_{q_2}^{(k_2)}}$

es el Tensor irreducible de rango k dado por A y B (hay $\forall k$ tal que $|k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2$)

Donde $\langle k_1, k_2 ; q_1, q_2 |$ está escrito en la base producto y

$| k_1, k_2, k ; q \rangle =: | k, q \rangle$ en la base de suma de momentos angulares

Es decir, para armar T necesito A, B y los coeficientes de Clebsch-Gordan

$\Rightarrow$ Ya se que va a haber un montón de coeficientes nulos, lo que da lugar a reglas de selección:

$\langle k_1, k_2 ; q_1, q_2 \,|\, k_1, k_2, k ; q \rangle \neq 0$ solo si $\boxed{q = q_1 + q_2 \text{ y } |k_1 - k_2| \leq k \leq k_1 + k_2}$

Para calcular los valores de expectación de los Q_{ik} necesito poder describir términos cuadráticos en la posición en términos de Tensores esféricos

~~[illegible]~~

Idea: Usar $A = \hat{R} = B$. Ojo $\hat{R}$ es operador vectorial, no Tensorial

Usamos el P15 para obtener el operador Tensorial asociado

Para eso hay que verificar que efectivamente $\hat{R}$ es un operador vectorial.

Ejercicio: Chequearlo. Usar la representación de posición, es decir,

$$iL_k = \varepsilon_{ijk}\, x_i\, \partial_j$$

El operador Tensorial de rango 1 inducido por $\bar{R}$ es $V^{(1)}$, con

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{x \pm iy}{\sqrt{2}}, \quad V_0^{(1)} = z$$

$\therefore$ Tomamos $A = V = B \Rightarrow k_1 = 1 = k_2 \Rightarrow 0 \leq k \leq 2$

Obs Hay 9 combinaciones de $x_i x_j$, $i,j = 1,2,3$. Como éstos conmutan basta con calcular sólo 6

Los 6 T's que van a bastar son los siguientes

$$T^{(2)}_{\pm 2} = \frac{1}{2}(x \pm iy)^2 \quad , \quad T^{(2)}_{\pm 1} = \mp z(x \pm iy) \quad , \quad T^{(2)}_{0} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3z^2 - (x^2+y^2+z^2))$$

$$T^{(0)}_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2+y^2+z^2)$$

Calculemos 2 de ellos, para ver cómo se obtienen

•) $T^{(2)}_{2} = \sum_{m_1, m_2} \langle 1,1; m_1, m_2 | 1,1, 2; 2 \rangle \, V^{(1)}_{m_1} V^{(1)}_{m_2}$.

Por las reglas de selección, $m_1 + m_2 = 2 \Rightarrow m_1 = 1 = m_2$

$\Rightarrow T^{(2)}_2 = \langle 1,1 | 2;2 \rangle \frac{1}{2}(x+iy)^2 = \frac{1}{2}(x+iy)^2$ ✓

quité la etiqueta superflua de j_1 y j_2

•) $T^{(0)}_0 = \sum_{m_1, m_2} \langle 1,1; m_1, m_2 | 1,1, 0; 0 \rangle \, V^{(1)}_{m_1} V^{(1)}_{m_2}$

$m_1 + m_2 = m = 0 \Rightarrow m_1 = -m_2$. Entonces hay 3 términos:

$$T^{(0)}_0 = \langle 1,-1 | 0;0 \rangle V^{(1)}_1 V^{(1)}_{-1} + \langle 0,0 | 0;0 \rangle V^{(1)\,2}_0 + \langle -1,1 | 0;0 \rangle V^{(1)}_{-1} V^{(1)}_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) + \frac{-1}{\sqrt{3}} z^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3}}(x^2+y^2+z^2) = T^{(0)}_0 \quad ✓$$

Invirtiendo las relaciones,

$$xy = \frac{T^{(2)}_2 - T^{(2)}_{-2}}{2i} \quad , \quad xz = \frac{T^{(2)}_1 - T^{(2)}_{-1}}{2} \quad , \quad yz = \frac{-(T^{(2)}_1 + T^{(2)}_{-1})}{2i}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(T^{(2)}_2 + T^{(2)}_{-2}) - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T^{(2)}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} T^{(0)}_0\right)$$

$$y^2 = \frac{-1}{2}(T^{(2)}_2 + T^{(2)}_{-2}) - \left(\frac{1}{\sqrt{6}} T^{(2)}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} T^{(0)}_0\right) \qquad z^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, T^{(2)}_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} T^{(0)}_0$$

Por último, recordar el Teorema de W-E:

$$\boxed{(\text{W-E}) \qquad \langle \alpha\, j\, m | T^{(k)}_q | \alpha' j' m' \rangle = \langle k j' ; q, m' | j m \rangle \, T^{k, jj'}_{\alpha, \alpha'}}$$

donde $T^{k, jj'}_{\alpha, \alpha'}$ no depende de m, m' ni q

Calcular $q\langle 2jm'|x^2-y^2|2j,j\rangle$, $m' = -j, \ldots$

a) Vamos a necesitar más adelante relacionar el $T^{(k,j)j'}_{\alpha,\alpha'}$ del Teorema de W-E con Q, así que lo hacemos ahora

$$Q = \langle 2jj|Q_{zz}|2jj\rangle = q\langle 2jj|3z^2-r^2|2jj\rangle$$

$$= \sqrt{6}\,q\,\langle 2jj|T^{(2)}_0|2jj\rangle$$

$$\overset{(W-E)}{=} \sqrt{6}\,q\,\underbrace{\langle 2j;0,j|jj\rangle}_{=(*)}\ \underbrace{T^{2,jj}_{2,2}}_{=T^{2,j}_2}$$

Observar que $(*) = \underbrace{(\langle 2,0|\otimes\langle j,j|)}\,\underline{|jj\rangle}$

está en la base desacoplada — en la base suma

Este coef de C-G corresponde a estar sumando representaciones de momento angular $j_1 = 2$, $j_2 = j$ $\Rightarrow |j_1-j_2|\leq J\leq j_1+j_2$ ...

Pero J es j ! $\Rightarrow |2-j|\leq j\leq j+2$

Esto va a tener sentido cuando $-j\leq 2-j\leq j \iff 2\leq 2j \iff 1\leq j$

Es decir, si $j = 0, \frac{1}{2} \Rightarrow Q = 0$ (ítem (c))

$$\therefore\ Q = \sqrt{6}\,q\,\langle 2j;0,j|jj\rangle\,T^{2,j}_2 \iff T^{2,j}_2 = \frac{Q}{q}\,\frac{1}{\sqrt{6}\,\langle 2j;0,j|jj\rangle}$$

Ahora sí, calculamos el elemento de matriz pedido

De las relaciones anteriores, $x^2-y^2 = T^{(2)}_2 + T^{(2)}_{-2}$

$$\Rightarrow q\langle 2jm'|x^2-y^2|2jj\rangle = q\langle 2jm'|T^{(2)}_2|2jj\rangle + q\langle 2jm'|T^{(2)}_{-2}|2jj\rangle$$

$$\overset{(W-E)}{=} q\Big[\underbrace{\langle 2j;\underset{=m_1}{2},\underset{=m_2}{j}|jm'\rangle}_{m=m_1+m_2=2+j\ >\ j\ \text{Abs}}\,T^{2,j}_2 + \langle 2j;-2,j|jm'\rangle\,T^{2,j}_2\Big]$$

$$\Rightarrow q\langle 2jm'|x^2-y^2|2jj\rangle = q\,T^{2,j}_2\,\langle -2,j|jm'\rangle$$

$$\boxed{= \frac{Q}{\sqrt{6}}\,\frac{\langle -2,j|jm'\rangle}{\langle 2,j;0,j|jj\rangle}\,\delta_{m',j-2}}$$

Para ítem b), notar que $3q(x^2-y^2) = Q_{xx}-Q_{yy}$

b) Evaluar $\langle \alpha, j, j | Q_{ik} | \alpha, j, j \rangle$ $\forall\, i,k$. Interpretar

Mirando $Q_{ik} = q(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2)$

Se puede ver fácilmente usando las relaciones que para escribir a los Q_{ik} en términos de las componentes de T no aparece la componente $T^{(0)}_0$

$\Rightarrow Q_{ik} = \sum_{m'} C^{m'}_{ik} T^{(2)}_{m'}$

$\Rightarrow \langle Q_{ik} \rangle = \langle \alpha j m | Q_{ik} | \alpha j j \rangle = \sum_{m'} C^{m'}_{ik} \langle \alpha j j | T^{(2)}_{m'} | \alpha j j \rangle$

Mirando (W-E), vemos que los sumandos no nulos tienen $m = m' + m$

$\Rightarrow m' = 0$. Por lo tanto, solo veo los valores medios con $T^{(2)}_0$

Ahora sí,

- $i \neq k$, $Q_{ik} = 3x_i x_k$ No aparece $T^{(2)}_0$ $\Rightarrow \langle Q_{ik} \rangle = 0$
- $i = k$, ya tenemos $\langle Q_{zz} \rangle$ y $\langle Q_{xx} - Q_{yy} \rangle$

  Usando que $Tr(Q_{ik}) = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$ (por def de Q_{ik})

  $\Rightarrow \langle Q_{xx} + Q_{yy} \rangle = -\langle Q_{zz} \rangle = Q$

Ya tenemos todos entonces, ~~los~~ son

$$\begin{cases} \langle Q_{zz} \rangle = Q \neq 0 \text{ si } j \geq 1 \\ \langle Q_{xx} \rangle = -\frac{1}{2} \langle Q_{zz} \rangle \\ \langle Q_{yy} \rangle = -\frac{1}{2} \langle Q_{zz} \rangle \end{cases}$$

Interpretando. El estado en el que calculamos el valor de expectación, $|\alpha, j, m = j\rangle$, es invariante ante rotaciones en el plano xy:

$e^{-i \frac{J_z \theta}{\hbar}} | j, m \rangle = e^{-i \frac{\hbar m \theta}{\hbar}} | j, m \rangle = e^{-i\theta} | j, m \rangle \equiv | j m \rangle$

La distribución de