awesome marvosym letters
[,left]1 1

Física Teórica 2 - Tensores esféricos y Teorema de Wigner- Eckart

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

6 de junio de 2023

1. Tensores irreducibles

Los operadores tensoriales irreducibles (también llamados esféricos) son un conjunto de operadores caracterizados por un mismo rango (k) y por $2k+1$ componentes $-k \leq q \leq k$: $T_q^(k)$, que ante rotaciones satisface la siguiente relación (usamos $R \to R^{-1}$ del apunte): Los operadores tensoriales irreducibles (también llamados esféricos) son un conjunto de operadores caracterizados por un mismo rango (k) y por $2k+1$ componentes $-k \leq q \leq k$: $T_q^(k)$, que ante rotaciones satisface la siguiente relación (usamos $R \to R^{-1}$ del apunte):

$$\mathcal{D}\left(R\right) T_q^{(k)} \; \mathcal{D}^\dagger\left(R\right) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}\left(R\right) T_{q'}^{(k)},$$

donde $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k, es decir $\langle kq'|\mathcal{D}(R)|kq\rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)}, \qquad \left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, T_{q\pm 1}^{(k)}.$$

2. Composición de matrices de rotación

3. Problema 15

Sean $\{T_{-k}^{(k)}, T_{-k+1}^{(k)}, \ldots, T_{k-1}^{(k)}, T_k^{(k)}\}$ $2k+1$ operadores. Decimos que $T_q^{(k)}$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $T_q^{(k)}$ se transforma de la forma

$$\mathcal{D}\left(R\right) T_q^{(k)} \; \mathcal{D}^\dagger\left(R\right) = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^{(k)}\left(R\right) T_{q'}^{(k)},$$

donde $\mathcal{D}_{q'q}^{(k)}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k, es decir $\langle kq'|\mathcal{D}(R)|kq\rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)}, \qquad \left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, T_{q\pm 1}^{(k)}.$$

(a) Verifique que si $\boldsymbol{V}$ es un operador vectorial, entonces los operadores $V_q^{(1)}$ dados por

$$V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 = V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea $\boldsymbol{V}$ un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y_{l=1}^m(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas y sean $V_q^{(1)}$, $q = -1, 0, 1$, operadores definidos de la forma

$$V_q^{(1)} = rY_1^q\left(V_x, V_y, V_z\right),$$

(es decir que en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables x_i por los respectivos operadores V_i). Verifique entonces que los operadores $V_q^{(1)}$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Suponiendo que las componentes de $\boldsymbol{V}$ conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y_l^m \xrightarrow[R]{} \left(Y_l^m\right)' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^{(l)}\left(R\right)\, Y_l^{m'},$$

discuta por qué la sustitución $V_q^{(k)} = r^k Y_k^q(V_x, V_y, V_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k.

Solución: Es fácil ver que con $k = 1$ y $q = 0$, las relaciones de conmutación se cumplen si $T_0^{(1)} = V_z$, pues para $q = 0$ tenemos: $[J_z, V_0^{(1)}] = 0 = [J_z, V_z]$.

Sabemos que siendo $V_q^{(1)}$ un operador tensorial esférico, las componentes $q = \pm 1$ deben satisfacer:

$$[J_\pm, V_0^{(1)}] = \hbar\sqrt{2} V_{\pm 1}^{(} 1)$$

de donde despejamos $V_{\pm 1}^{(} 1)$:

$$V_{\pm 1}^{(} 1) = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}[J_x \pm iJ_y, V_z] = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(-i\hbar V_y \pm i^2\hbar V_x))$$

obteniendo:

$$\boxed{V_{\pm 1}^{(} 1) = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}}$$

4. Problema 16

Sean $V^{(k_1)}$ y $W^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2, respectivamente.

(a) Muestre entonces que los operadores $T_q^{(k)}$, dados por

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1,q_2} V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq \rangle \,,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango k. Para ello, estudie cómo transforma $T^{(k)}$ ante rotaciones.

(b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto $V_i W_j$ de las componentes de dos operadores vectoriales $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes V_i y W_j. En particular, si $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

Solución:

Hay dos formas de plantear el problema, usando las propiedades del los operadores tensoriales irreducibles ante rotaciones finitas o ante rotaciones infinitesimales (relaciones de conmutación). Esta última forma es mas compacta.

(a) Debemos probar que dados:

$$\left[J_z, V_{q_1}^{(k_1)}\right] = \hbar q_1 V_{q_1}^{(k_1)}, \qquad \left[J_\pm, V_{q_1}^{(k_1)}\right] = \hbar \sqrt{k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \pm 1)}\, V_{q_1 \pm 1}^{(k_1)}$$
$$\left[J_z, W_{q_2}^{(k_2)}\right] = \hbar q_2 W_{q_2}^{(k_2)}, \qquad \left[J_\pm, W_{q_2}^{(k_2)}\right] = \hbar \sqrt{k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \pm 1)}\, W_{q_2 \pm 1}^{(k_2)}$$

entonces se cumple:

$$\left[J_z, T_q^{(k)}\right] = \hbar q T_q^{(k)}, \qquad \left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)}\, T_{q\pm 1}^{(k)}.$$

La idea es introducir la definición del enunciado para $T_q^{(k)}$ en las relaciones de conmutación.

i)Probar la primera relación es un buen ejercicio para les alumnes, deben usar propiedades de conmutadores: $[J_z, V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)}] = [J_z, V_{q_1}^{(k_1)}] W_{q_2}^{(k_2)} + V_{q_1}^{(k_1)} [J_z, W_{q_2}^{(k_2)}]$.

ii) Procedemos a probar la segunda relación.

$$\begin{aligned}
\left[J_\pm, T_q^{(k)}\right] &= \sum_{q_1,q_2} \left(\left[J_\pm, V_{q_1}^{(k_1)}\right] W_{q_2}^{(k_2)} + V_{q_1}^{(k_1)} \left[J_\pm, W_{q_2}^{(k_2)}\right] \right) \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq \rangle \\
&= \sum_{q_1,q_2} (\hbar\sqrt{k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \pm 1)}\, V_{q_1 \pm 1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} + \\
&\quad \hbar\sqrt{k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \pm 1)}\, V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2 \pm 1}^{(k_2)}) \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq \rangle \\
&= \sum_{q_1,q_2} (\hbar\sqrt{k_1(k_1+1) - q_1(q_1 \mp 1)}\, \langle k_1 k_2; q_1 \mp 1, q_2 | kq \rangle + \\
&\quad \hbar\sqrt{k_2(k_2+1) - q_2(q_2 \mp 1)}\, \langle k_1 k_2; q_1, q_2 \mp 1 | kq \rangle)\, V_{q_1}^{(k_1)} W_{q_2}^{(k_2)} \\
&= \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)}\, T_{q \pm 1}^{(k)}.
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa la recurrencia de los coeficientes de Clebsh-Gordon y la definición de los $T_q^{(k)}$.

(b) Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$ entonces $|k_1 - k_2| \le k \le k_1 + k_2$ implica $k = 0$, $k = 1$ o $k = 2$. El tensor de rango $k = 0$ es un escalar (una componente independiente), el de rango $k = 1$ es un vector (tres componentes independientes, veremos que está relacionado al producto vectorial $V \times W$) y el tensor de rango $k = 2$ es un tensor simétrico de traza nula (cinco componentes independientes pues hay cuatro condiciones). En total se obtienen las nueve componentes independientes que se obtienen de hacer los productos de componentes de dos vectores.

(c) Como se vio en el Problema 15, con las componentes de un vector formamos dos tensores de rango $k = 1$:

$$V_0^{(1)} = V_z \qquad V_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}$$

$$W_0^{(1)} = W_z \qquad W_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{W_x \pm iW_y}{\sqrt{2}}$$

Usaremos la composición de tensores irreducibles para formar tensores de rango $k = 0, 1, 2$.

- **k=0 (escalar)**

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= V_1^{(1)} W_{-1}^{(1)} \underbrace{\langle 11; 1\, -1 | 00 \rangle}_{\sqrt{4/3}} + V_0^{(1)} W_0^{(1)} \underbrace{\langle 11; 00 | 00 \rangle}_{-\sqrt{1/3}} + V_{-1}^{(1)} W_1^{(1)} \underbrace{\langle 11; 1\, -1 | 00 \rangle}_{\sqrt{1/3}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2}(V_x + iV_y)(W_x - iW_y) + V_z W_z + \frac{1}{2}(V_x - iV_y)(W_x + iW_y) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} (V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}
\end{aligned}$$

- **k=1 (vector)**