HOJA N
FECHA

# Ejercicio 2 guía 8

## Generación de estados coherentes en una cavidad

Considere una cavidad mono-modo de frecuencia $\omega_c$ que se encuentra inicialmente en el estado de vacío $|0\rangle$ (es decir sin fotones). La cavidad se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas (clásica) que oscilan con una frecuencia $\omega_p$. El acoplamiento entre la fuente y la cavidad

$$H_p = -\vec{A}\cdot\vec{J}(t) = 2\hbar\Omega\,(a+a^{+})\cos(\omega_p t)$$

puede aproximarse bajo la aproximación de onda rotante (es decir sin términos de alta frecuencia) por

$$H_p \simeq \hbar\Omega\,(a\,e^{i\omega_p t} + a^{+} e^{-i\omega_p t})$$

a) Encuentre cuál es el estado del campo dentro de la cavidad después de un tiempo $t$. Para ello resuelva la ec de Heisenberg para el operador de destrucción $a$, considerando primero el caso $\omega_c \neq \omega_p$. Muestre de esta forma que el estado a tiempo $t$ es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$.

¿Cuál es el $\alpha(t)$ correspondiente? Para el caso resonante $\omega_c = \omega_p$ tome el límite en el estado obtenido antes. ¿Qué obtiene? ¿Cómo es la intensidad del campo a tiempos largos? Interprete.

(ayuda: la solución de $f'(t) = -i\omega f(t) - i\Omega e^{-i\omega' t}$ es $f(t) = c\,e^{-i\omega t} + \frac{\Omega}{\omega'-\omega}e^{-i\omega' t}$ con $c$ una cte de integración)

Re:

Tenemos una cavidad mono-modo acoplada a una fuente clásica

El Hamiltoniano del sistema será el de la ~~cavi~~ cavidad + el $H_p$

$$\Rightarrow \quad H = H_0 + H_p$$

$$H = \underbrace{\hbar\omega_c\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)}_{\text{Hamiltoniano de la cavidad}} + \underbrace{\hbar\Omega\,(a\,e^{i\omega_p t} + a^{+}e^{-i\omega_p t})}_{\text{Hamiltoniano de acople}}$$

NOTA

Queremos ver cuál es el estado del campo dentro de la cavidad en un tiempo $t$

El ejercicio nos guía, nos dice que resolvamos la ec de Heisenberg para $\hat{a}$.

¿Por qué esto nos sirve?

sabemos que el estado inicial es $|0\rangle$, por lo que

$\hat{a}|0\rangle = 0 = 0|0\rangle$ por lo que podríamos decir que el estado de vacío $|0\rangle$ es autoestado del operador $\hat{a}$ con autovalor $0$.

sabemos que los autoestados del operador $\hat{a}$ son estados coherentes:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

y su evolución temporal está dada por:

$$\hat{a}|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle \rightsquigarrow \text{Rep SCH}$$

$$\hat{a}(t)|\alpha\rangle = \alpha(t)|\alpha\rangle \rightsquigarrow \text{Rep Heisenberg}$$

Por lo que para encontrar la evolución temporal del $|0\rangle$ podemos analizar la evolución temporal del operador $\hat{a}$ y con eso, volviendo a la rep de SCH, obtener la evolución temporal de $|0\rangle$.

Entonces, pasamos a calcular la evolución temporal de $\hat{a}$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{a}(t) = \left[\hat{a}(t), \hat{H}\right]$$

$$i\hbar\, \dot{a}(t) = \left[\hat{a}, \hbar\omega_c\left(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega\left(\hat{a}e^{i\omega_p t} + \hat{a}^{+}e^{-i\omega_p t}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega_c \underbrace{\left[\hat{a}, \hat{a}^{+}\hat{a}\right]}_{\hat{a}} + \hbar\Omega\left(\underbrace{[\hat{a},\hat{a}]}_{0}e^{i\omega_p t} + \underbrace{[\hat{a},\hat{a}^{+}]}_{\mathbb{I}}e^{-i\omega_p t}\right)$$

$$= \hbar\omega_c\hat{a} + \hbar\Omega e^{-i\omega_p t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{a}(t) = -i\omega_c\hat{a} - i\Omega e^{-i\omega_p t}$$

y usando la ayuda del enunciado:

NOTA

Asumiendo $\omega_c \neq \omega_p$

$$a(t) = C\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\, e^{-i\omega_p t} \qquad ¿C?$$

y $\hat{a}(0) = \hat{a}$

op destrucción a rep de SCH

$$\Rightarrow \quad \hat{a} = C + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c} \Rightarrow C = \hat{a} - \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{a}(t) = \hat{a}\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left( e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t} \right)}$$

Con lo cual, a la rep de Heisenberg:

$$\hat{a}(t)\,|0\rangle = \left[ \hat{a}\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left( e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t} \right) \right] |0\rangle$$

$$= \underbrace{\hat{a}|0\rangle}_{0}\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left( e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t} \right)|0\rangle$$

$$= \alpha(t)\,|0\rangle \quad \text{con} \quad \boxed{\alpha(t) = \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left( e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t} \right)}$$

Por lo cual podemos decir que el estado del campo (en rep SCH) evoluciona en un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$ con el $\alpha(t)$ de arriba.

En el caso resonante: $\omega_c = \omega_p$

$$\alpha(t)_{res} = \lim_{\omega_p \to \omega_c} \Omega\, \frac{e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}}{\omega_p - \omega_c} \overset{\text{"0/0"}}{=} \underset{\text{L'H}}{} \lim_{\omega_p \to \omega_c} \frac{\Omega(-it)\, e^{-i\omega_p t}}{1} = -i\Omega t\, e^{-i\omega_p t}$$

$$\Rightarrow \text{En el caso resonante} \quad \boxed{\alpha(t)_{res} = -i\Omega t\, e^{-i\omega_p t}}$$

y la intensidad del campo:

$$\langle \alpha(t) | \vec{E}^2 | \alpha(t) \rangle$$

donde $\vec{E} = i\sqrt{\dfrac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\left( \hat{a}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right)$

Campo eléctrico cuantizado en una cavidad mono-modo

$$\Rightarrow (\vec{E})^2 = -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left[ \hat{a}^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right]$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left[ \hat{a}^2 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \mathbb{I} - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right]$$

$$\left( \begin{aligned} &[a, a^\dagger] = \mathbb{I} \\ &\Rightarrow a a^\dagger = \mathbb{I} + a^\dagger a \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \langle \alpha(t) | \vec{E}^2 | \alpha(t) \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\Big[ e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \langle \alpha(t) | \hat{a}^2 | \alpha(t) \rangle - 1 - 2\langle \alpha(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha(t) \rangle$$
$$+ e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \langle \alpha(t) | \hat{a}^{\dagger 2} | \alpha(t) \rangle \Big]$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left\{ e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} [\alpha(t)]^2 - 1 - 2|\alpha(t)|^2 + e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} [\alpha^*(t)]^2 \right\}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left\{ -e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Omega^2 t^2 e^{-2i\omega t} - 1 - 2\Omega^2 t^2 - e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Omega^2 t^2 e^{2i\omega t} \right\}$$

$\alpha(t) = -i\Omega t\, e^{-i\omega t}$

$$= -\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left\{ -\Omega^2 t^2 \left( e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-2\omega t)} + e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-2\omega t)} \right) - 1 - 2\Omega^2 t^2 \right\}$$

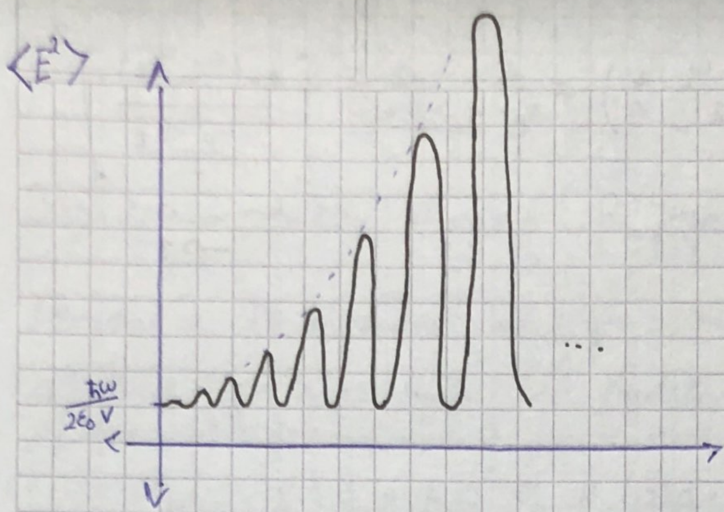
$$= +\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left\{ 1 + 2\Omega^2 t^2 + 2\Omega^2 t^2 \cos[2(\vec{k}\cdot\vec{r}-2\omega t)] \right\}$$

$$\boxed{\langle \alpha(t) | E^2 | \alpha(t) \rangle = +\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}\left[ 1 + 4\Omega^2 t^2 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - 2\omega t) \right]}$$

$\Rightarrow$ La intensidad oscila alrededor de una crecida cuadrática

NOTA

$\Rightarrow$ En el ~~...~~ caso resonante aumentamos la intensidad del campo en la cavidad a lo largo de t.




b) Calcule el valor medio de fotones en la cavidad y la probabilidad de tener cero fotones en función del tiempo, analice los valores que toman estas expresiones en el caso resonante e interprete.

Rta:

Valor medio de fotones:

$$\langle N \rangle = \langle \alpha(t) | a^\dagger a | \alpha(t) \rangle = |\alpha(t)|^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\right)^2 \left| e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t} \right|^2$$

$$\alpha(t) = \frac{\Omega}{\omega_p - \omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)$$

$$= \frac{\Omega^2}{(\omega_p - \omega_c)^2}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\left(e^{i\omega_p t} - e^{i\omega_c t}\right)$$

$$= \frac{\Omega^2}{(\omega_p - \omega_c)^2}\left[1 - e^{-i(\omega_p - \omega_c)t} - e^{i(\omega_p - \omega_c)t} + 1\right]$$

$$= \frac{\Omega^2}{(\omega_p - \omega_c)^2}\left[2 - 2\cos((\omega_p - \omega_c)t)\right]$$

$$\boxed{\langle N \rangle = \frac{\Omega^2}{(\omega_p - \omega_c)^2}\, 4 \sin^2\left(\frac{\omega_p - \omega_c}{2} t\right)}$$

Prob de 0 fotones:

$$P(0)(t) = |\langle 0 | \alpha(t) \rangle|^2 = \left| \left\langle 0 \right| e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(t)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \Big\rangle \right|^2 = e^{-|\alpha(t)|^2}$$

$$\boxed{P(n=0)(t) = \exp\left\{-\frac{\Omega^2}{(\omega_p - \omega_c)^2}\, 4 \sin^2\left(\frac{\omega_p - \omega_c}{2} t\right)\right\}}$$

NOTA

En el caso resonante:

$$\langle N \rangle = \lim_{\omega_p \to \omega_c} \frac{4\Omega^2}{(\omega_p-\omega_c)^2} \sin^2\left(\frac{\omega_p-\omega_c}{2} t\right) = \lim_{\omega_p \to \omega_c} \Omega^2 t^2 \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega_p-\omega_c}{2} t\right)}{\frac{\omega_p-\omega_c}{2} t}\right]^2}_{\to 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \langle N \rangle_{res} = \Omega^2 t^2 \\ \Rightarrow P(n=0)(t)_{res} = e^{-\Omega^2 t^2} \end{array}}$$

c) Finalmente, suponga que el estado inicial de la cavidad es un estado coherente $|\alpha_0\rangle$ y se acopla con el campo clásico tal como antes. Muestre ahora que el estado de la cavidad a todo tiempo es un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$ y encuentre el valor de $\alpha(t)$.

R:

inicialmente: $\hat{a}|\alpha_0\rangle = \alpha_0 |\alpha_0\rangle$

La evolución será: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\alpha_0\rangle$:

$$\hat{a}|\psi(t)\rangle = \hat{a}\,\hat{U}(t)|\alpha_0\rangle = \overbrace{\hat{U}\,\hat{U}^+}^{\mathbb{I}}\underbrace{\hat{a}\,\hat{U}}_{\hat{a}(t)}|\alpha_0\rangle = \hat{U}\,\hat{a}(t)|\alpha_0\rangle$$

$$= \hat{U}(t)\left[\hat{a}\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right]|\alpha_0\rangle$$

$$= \hat{U}(t)\left[\alpha_0\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right]|\alpha_0\rangle$$

$$\boxed{\hat{a}|\psi(t)\rangle = \underbrace{\left[\alpha_0\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right]}_{\alpha(t)}|\psi(t)\rangle}$$

NOTA