HOJA N°

FECHA

Ejercicio 8 guía 8

Hamiltoniano efectivo dispersivo de Jaynes-Cummings

Considere el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings en el régimen dispersivo

a) Muestre que en este límite, el Hamiltoniano se puede reducir a un Hamiltoniano efectivo dado por

$$H_{eff} = H_A + H_C + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes (a^\dagger a+1) = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes(a^\dagger a+1)$$

Interprete

Rta:

En el caso dispersivo: $\Delta >> \frac{\Omega}{2}\sqrt{n+1}$

$$E_{n,\pm} = \hbar\omega_c(n+1) \pm \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}(n+1)} \longrightarrow \hbar\omega_c(n+1) \pm \left(\hbar\frac{\Delta}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right)$$

y los autovectores son $|e,n\rangle$ y $|g,n+1\rangle$

=> Usando la descomposición espectral

$$H_{eff} = \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c(n+1) + \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right]|e,n\rangle\langle e,n| +$$

$$+ \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c(n+1) - \frac{\hbar\Delta}{2} - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right]|g,n+1\rangle\langle g,n+1| + \underbrace{\left[-\frac{\hbar\Delta}{2}\right]|g,0\rangle\langle g,0|}_{\text{fundamental}}$$

$$\cancel{= \sum_n \hbar\omega_c(n+1)(|e,n\rangle\langle e,n| + |g,n+1\rangle\langle g,n+1|)}$$

Renumeramos la 2da sumatoria

$$= \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c(n+1) + \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right]|e,n\rangle\langle e,n|$$

$$+ \sum_{n\geq 1}\left[\hbar\omega_c n - \frac{\hbar\Delta}{2} - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}n\right]|g,n\rangle\langle g,n| - \frac{\hbar\Delta}{2}|g,0\rangle\langle g,0|$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c(n+1) + \frac{\hbar\Delta}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right]|e,n\rangle\langle e,n| + \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c n - \frac{\hbar\Delta}{2} - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}n\right]|g,n\rangle\langle g,n|$$

NOTA

y $\Delta = \omega_a - \omega_c$

$$H_{eff} = \sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\right]|e,n\rangle\langle e,n| +$$

$$+\sum_{n\geq 0}\left[\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_a}{2} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\, n\right]|g,n\rangle\langle g,n|$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\omega_a}{2}\left(|e,n\rangle\langle e,n| - |g,n\rangle\langle g,n|\right) + \sum_{n\geq 0}\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(|e,n\rangle\langle e,n| + |g,n\rangle\langle g,n|\right)$$

$$+\sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\left(|e,n\rangle\langle e,n| - |g,n\rangle\langle g,n|\right) + \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}|g,n\rangle\langle g,n|$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\omega_a}{2}\left(\overbrace{|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|}^{\sigma_z}\right)\otimes|n\rangle\langle n| + \sum_{n\geq 0}\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\overbrace{|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|}^{\mathbb{I}_a}\right)\otimes|n\rangle\langle n|$$

$$+\sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}(n+1)\left(\underbrace{|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|}_{\sigma_z}\right)\otimes|n\rangle\langle n| + \sum_{n\geq 0}\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}|g,n\rangle\langle g,n|$$

$$= \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z\otimes\underbrace{\sum_{n\geq 0}|n\rangle\langle n|}_{\mathbb{I}_c} + \hbar\omega_c\sum_{n\geq 0}\left(n|n\rangle\langle n| + \frac{|n\rangle\langle n|}{2}\right) +$$

$$+\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes\sum_{n\geq 0}(n+1)|n\rangle\langle n| + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}|g\rangle\langle g|\otimes\overbrace{\sum_{n\geq 0}|n\rangle\langle n|}^{\mathbb{I}_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_{eff} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes\left(\hat{N}+\mathbb{I}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}|g\rangle\langle g|}$$

se desacopla la interacció, Tenemos un H de la forma:

$$H_{eff} = H_{0_A} + H_{0_C} + H_{INT_A}\otimes H_{INT_C} + H_C$$

b) Muestre que $[\sigma_z, H_{eff}] = 0$, $[a^\dagger a, H_{eff}] = 0$ y $[\sigma_z, a^\dagger a] = 0$

¿Qué significa eso?

Rs:

- $$[\sigma_z, H_{eff}] = \frac{\hbar\omega_a}{2}\underbrace{[\sigma_z, \sigma_z]}_{0} + \hbar\omega_c \underbrace{[\sigma_z, \mathbb{I}]}_{0} \otimes \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\underbrace{[\sigma_z, \sigma_z]}_{0} \otimes (a^\dagger a + \mathbb{I})$$

$$+ \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z, |g\rangle\langle g|] = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\left\{(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)\,|g\rangle\langle g| - |g\rangle\langle g|(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)\right\}$$

$$= \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\left\{ \cancel{|e\rangle\langle e|} - \cancel{|g\rangle\langle g|} - \cancel{|e\rangle\langle e|} + \cancel{|g\rangle\langle g|} \right\} = 0 \checkmark$$

- $$[a^\dagger a, H_{eff}] = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z \otimes \underbrace{[a^\dagger a, \mathbb{I}]}_{0} + \hbar\omega_c \underbrace{\left[a^\dagger a, a^\dagger a + \frac{\mathbb{I}}{2}\right]}_{0} + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \underbrace{[a^\dagger a, a^\dagger a + \mathbb{I}]}_{0}$$

$$+ \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}|g\rangle\langle g| \otimes \underbrace{[a^\dagger a, \mathbb{I}]}_{0} = 0 \checkmark$$

- $$[\sigma_z, a^\dagger a] = [\sigma_z \otimes \mathbb{I}_c, \mathbb{I}_A \otimes a^\dagger a] = \sigma_z \otimes a^\dagger a - \sigma_z \otimes a^\dagger a = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ σ_z y $a^\dagger a$ se conmutan, y H_{eff}, σ_z y $a^\dagger a$ forman un CCOC.

c) Suponga que el sistema se encuentra en un autoestado del Hamiltoniano. Muestre entonces que midiendo la frec del modo de la cavidad se puede inferir el estado del átomo. A su vez, muestre que midiendo el estado del átomo se puede inferir el número de fotones en la cavidad.

Rs: Como la energía, σ_z y $\hat{N}$ se pueden medir simultáneamente, si se mide $\hat{N}$ y da m $\Rightarrow$ podemos tener $|e, m\rangle$ o $|g, m\rangle$

midiendo la energía se puede discernir $|e, m\rangle$ y $|g, m\rangle$, por lo cual se sabe si el átomo está en $|e\rangle$ o $|g\rangle$.

Análogamente, si se mide el estado del átomo y la energía se puede inferir el número de fotones.

d) Suponga que inicialmente la cavidad se encuentra en un modo coherente $|\alpha\rangle$ y el átomo entra a la cavidad en el estado $\frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}}$. Calcule el estado del sistema a un tiempo t posterior. Interprete. Calcule además la matriz densidad reducida del átomo en función del tiempo y muestre que se tiene un estado entrelazado entre el átomo y el campo de la cavidad.

R:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\alpha\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = e^{-iH_{eff}\frac{t}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$$

y

$$e^{-iH_{eff}\frac{t}{\hbar}} = e^{-i\frac{\omega_a}{2}\sigma_z t}\, e^{-i\omega_c(a^\dagger a + \frac{\mathbb{I}}{2})t}\, e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (a^\dagger a + \mathbb{I})]t}\, e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}|g\rangle\langle g| t}$$

todos los sumandos de H_{eff} conmutan entre sí

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t}\, e^{-i\omega_c(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2})t}\, e^{-i\frac{\omega_a}{2}\sigma_z t}\, \frac{|e\rangle + e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t}|g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\alpha\rangle$$

reordeno para aplicar primero las más fáciles

$$= e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t}\, e^{-i\omega_c(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2})t}\, \frac{|e\rangle e^{-i\frac{\omega_a t}{2}} + |g\rangle e^{-it\left(\frac{\Omega^2}{4\Delta} - \frac{\omega_a}{2}\right)}}{\sqrt{2}} \otimes |\alpha\rangle$$

¿Cómo actúa $e^{-i\omega_c(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2})t}$ sobre $|\alpha\rangle$?

$$e^{-i\omega_c(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2})t}|\alpha\rangle = \sum_n \frac{e^{-|\alpha|^2/2}}{\sqrt{n!}}\alpha^n e^{-i\omega_c(\hat{N}+\frac{\mathbb{I}}{2})t}|n\rangle$$

$$= \sum_n e^{-i\frac{\omega_c t}{2}} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{(\alpha e^{-i\omega_c t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$= e^{-i\frac{\omega_c t}{2}}|\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t} \left(\frac{|e\rangle e^{-i\frac{\omega_a t}{2}} + |g\rangle e^{-i\left(\frac{\Omega^2}{4\Delta} - \frac{\omega_a}{2}\right)t}}{\sqrt{2}}\right) \otimes e^{-i\frac{\omega_c t}{2}}|\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle$$

hasta ahora tengo un estado producto, porque apliqué evolución sobre cada parte por separado, el único término que los acopla es el $\propto [\sigma_z \otimes \hat{N} + \mathbb{I}]$

¿Cómo actúa $e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t}$ sobre $|e\rangle \otimes |\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle$ y

$|g\rangle \otimes |\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle$?

$$e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t} \, |{}^{e}_{g}\rangle \otimes |\alpha e^{-i\omega_c t}\rangle =$$

$$= \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{(\alpha e^{-i\omega_c t})^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\sigma_z \otimes (\hat{N}+\mathbb{I})]t} |{}^{e}_{g}\rangle \otimes |m\rangle$$

$$= \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{(\alpha e^{-i\omega_c t})^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}[\pm(m+1)]t} |{}^{e}_{g}\rangle \otimes |m\rangle$$

$$= \sum_m e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\mp\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t} \frac{(\alpha e^{-i\omega_c t} e^{\mp\frac{i\Omega^2}{4\Delta}})^m}{\sqrt{m!}} |{}^{e}_{g}\rangle \otimes |m\rangle$$

$$= e^{\mp\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t} |{}^{e}_{g}\rangle \otimes |\alpha e^{-i\omega_c t} e^{\mp\frac{i\Omega^2}{4\Delta}}\rangle$$

=>

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i\omega_c}{2}t}}_{\text{fase global, no importa}} \frac{|e, \alpha e^{-i\omega_c t} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}}\rangle e^{-\frac{i\omega_a t}{2}} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t} + |g, \alpha e^{-i\omega_c t} e^{\frac{i\Omega^2}{4\Delta}}\rangle e^{\frac{i\omega_a t}{2}}}{\sqrt{2}}$$

Vamos a abreviar : $\alpha e^{-i\omega_c t} e^{\mp\frac{i\Omega^2}{4\Delta}} = \alpha_\mp$

$$=> \boxed{|\psi(t)\rangle = \frac{|e, \alpha_-\rangle e^{-\frac{i\omega_a t}{2}} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t} + |g, \alpha_+\rangle e^{\frac{i\omega_a t}{2}}}{\sqrt{2}}}$$

para simplificar notación tenemos
$$\begin{cases} e^{-\frac{i\omega_a t}{2}} e^{-\frac{i\Omega^2}{4\Delta}t} = C_1(t) \\ e^{\frac{i\omega_a t}{2}} = C_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = \frac{1}{2}\Big[\overbrace{|c_1(t)|^2}^{1} |e,\alpha_-\rangle\langle e,\alpha_-| + c_1(t)c_2^*(t)\, |e,\alpha_-\rangle\langle g,\alpha_+|$$

$$+ c_2(t)c_1^*(t)\, |g,\alpha_+\rangle\langle e,\alpha_-| + \underbrace{|c_2(t)|^2}_{1} |g,\alpha_-\rangle\langle g,\alpha_-| \Big]$$

$$\Rightarrow \rho_A(t) = \frac{1}{2}\Big[|e\rangle\langle e| \underbrace{tr|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|}_{1} + c_1(t)c_2^*(t)\, |e\rangle\langle g|\, tr(|\alpha_-\rangle\langle\alpha_+|)$$

$$+ c_2(t)c_1^*(t)\, |g\rangle\langle e|\, tr(|\alpha_+\rangle\langle\alpha_-|) + |g\rangle\langle g| \underbrace{tr(|\alpha_-\rangle\langle\alpha_-|)}_{1} \Big]$$

$$y \bullet\ tr(|\alpha_-\rangle\langle\alpha_+|) = tr\Big(\sum_{n,m} e^{-\frac{|\alpha_-|^2}{2}} \frac{(\alpha_-)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\langle m|\, e^{-\frac{|\alpha_+|^2}{2}} \frac{(\alpha_+^*)^m}{\sqrt{m!}} \Big)$$

$$= \sum_n e^{-\frac{|\alpha_-|^2+|\alpha_+|^2}{2}} \frac{(\alpha_-\alpha_+^*)^n}{n!} \qquad y\ |\alpha_-| = |\alpha_+| = |\alpha|$$

$$= \sum_n e^{-|\alpha_+|^2} \frac{(\alpha_-\alpha_+^*)^n}{n!}$$

$$\bullet\ tr(|\alpha_+\rangle\langle\alpha_-|) = \sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_+\alpha_-^*)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \rho_A(t) = \frac{1}{2}\Big[|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| + c_1(t)c_2^*(t) \Big(\overbrace{\sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_-\alpha_+^*)^n}{n!}}^{c_3(\alpha_-,\alpha_+^*)} \Big) |e\rangle\langle g|$$

$$+ c_2(t)c_1^*(t) \Big(\underbrace{\sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_+\alpha_-^*)^n}{n!}}_{c_4(\alpha_+,\alpha_-^*)} \Big) |g\rangle\langle e| \Big]$$

$$\Rightarrow tr\, \rho_A^2 = \frac{1}{4}\Big[1 + 1 + |c_1|^2|c_2|^2 c_3(\alpha_-,\alpha_+^*)\, c_4(\alpha_+,\alpha_-^*) + |c_1|^2|c_2|^2 c_4(\alpha_+,\alpha_-^*)\, c_3(\alpha_-,\alpha_+^*) \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[2 + 2\, c_3(\alpha_-,\alpha_+^*)\, c_4(\alpha_+,\alpha_-^*) \Big]$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_- \alpha_+^*)^n}{n!}\right)\left(\sum_m e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_+ \alpha_-^*)^m}{m!}\right)\right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n,m} e^{-2|\alpha|^2} \frac{(\alpha_- \alpha_+^*)^n (\alpha_+ \alpha_-^*)^m}{n!\, m!}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left|\sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{(\alpha_- \alpha_+^*)^n}{n!}\right|^2\right] \leq \frac{1}{2}\left[1 + \Big(\overbrace{\sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}^{1 \text{ por la dist. de Poisson}}\Big)^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}[1+1] = 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Está entrelazado