HOJA N°

FECHA

Ejercicio 7 guía 9

Considere un oscilador armónico tridimensional $V(r) = m\omega^2 r^2/2$, colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. Defina $\omega_L = -\frac{qB}{2m}$ y elija el gauge $\vec{A} = -\vec{r}\times\frac{\vec{B}}{2}$

a) Muestre que al Hamiltoniano se le suma un operador lineal en ω_L (término paramagnético) y uno cuadrático en ω_L (término diamagnético). Halle la nueva estado estacionario con su degeneración.

Re:

$$H = \frac{(\vec{P} - q\vec{A})^2}{2m} + m\omega^2\frac{\vec{r}^2}{2} \qquad y \quad \vec{A} = -\vec{r}\times\frac{B\hat{z}}{2} = +\frac{xB}{2}\hat{y} - \frac{yB}{2}\hat{x} = \frac{B}{2}(x\hat{y} - y\hat{x})$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(P_x + \frac{qyB}{2}\right)\hat{x} + \left(P_y - \frac{qxB}{2}\right)\hat{y} + P_z\hat{z}\right]^2 + m\omega^2\frac{\vec{r}^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(P_x + \frac{qyB}{2}\right)^2 + \left(P_y - \frac{qxB}{2}\right)^2 + P_z^2\right] + m\omega^2\frac{\vec{r}^2}{2}$$

$$= \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left[P_x\, qyB + (qB)^2\frac{y^2}{4} - P_y\, qxB + (qB)^2\frac{x^2}{4}\right] + m\omega^2\frac{\vec{r}^2}{2}$$

$$= \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + \underbrace{\omega_L\underbrace{(P_y x - P_x y)}_{L_z}}_{\text{lineal en } \omega_L} + \underbrace{m\omega_L^2\frac{(x^2+y^2)}{2}}_{\text{cuadrático en } \omega_L} + m\omega^2\frac{\vec{r}^2}{2}$$

$$H = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \omega_L L_z + m\underbrace{(\omega_L^2 + \omega^2)}_{\text{redefino: } \omega_1^2}\frac{x^2+y^2}{2} + \underbrace{\frac{P_z^2}{2m} + m\omega^2\frac{z^2}{2}}_{\text{oscilador armónico común en la dirección } z}$$

Probamos que para si introducimos $a_x, a_x^+, a_y, a_y^+, a_z, a_z^+$

$$\left\{\begin{array}{lll} x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_1}}(a_x + a_x^+) & y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_1}}(a_y + a_y^+) & z = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_z + a_z^+) \\ P_x = \frac{\sqrt{\hbar m\omega_1}}{\sqrt{2}i}(a_x - a_x^+) & P_y = \frac{\sqrt{\hbar m\omega_1}}{\sqrt{2}i}(a_y - a_y^+) & P_z = \frac{\sqrt{\hbar m\omega}}{\sqrt{2}i}(a_z - a_z^+) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$

$$H = \hbar\omega_1\left(\hat N_x + \hat N_y + \mathbb{1}\right) + \hbar\omega\left(\hat N_z + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) + \omega_L\, i\hbar\left(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\right)$$

$$L_z = -P_x y + P_y x$$

$$= +\frac{i\hbar}{2}\left[(a_x - a_x^\dagger)(a_y + a_y^\dagger) - (a_y - a_y^\dagger)(a_x + a_x^\dagger)\right]$$

$$= +\frac{i\hbar}{2}\left[\cancel{a_x a_y} + a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y - \cancel{a_x^\dagger a_y^\dagger} - \cancel{a_y a_x} - a_y a_x^\dagger + a_y^\dagger a_x + \cancel{a_y^\dagger a_x^\dagger}\right]$$

$$= +\frac{i\hbar}{2}\left[2a_x a_y^\dagger - 2a_x^\dagger a_y\right] = -i\hbar\left(a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger\right)$$

definimos $\quad a_\pm = \dfrac{a_x \pm i a_y}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a_x = \dfrac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} \qquad a_y = \dfrac{a_+ - a_-}{i\sqrt{2}}$

y $\quad [a_\pm, a_\pm^\dagger] = \mathbb{1}, \quad [a_\pm, a_\mp] = 0 \quad$ -> son buena candidata para armar operador número $\hat N_\pm$ y armar el espacio de autoestados como hicimos con el osc armónico tradicional.

$\Rightarrow$

$$H = \hbar\omega_1\left(\hat N_+ + \hat N_- + \mathbb{1}\right) + \hbar\omega\left(\hat N_z + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) + i\hbar\omega_L\left[\left(\frac{a_+^\dagger + a_-^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_+ - a_-}{i\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a_+^\dagger - a_-^\dagger}{-i\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega_1\left(\hat N_+ + \hat N_- + \mathbb{1}\right) + \hbar\omega\left(\hat N_z + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) + \hbar\omega_L\left[\frac{\hat N_+ - \cancel{a_+^\dagger a_-} + \cancel{a_-^\dagger a_+} - \hat N_- + a_+ a_+^\dagger - \cancel{a_+ a_-^\dagger} + \cancel{a_- a_+^\dagger} - a_- a_-^\dagger}{2}\right]$$

$$= \hbar\omega_1\left(\hat N_+ + \hat N_- + \mathbb{1}\right) + \hbar\omega\left(\hat N_z + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) + \hbar\omega_L\left[\frac{2\hat N_+ + \cancel{\mathbb{1}} - 2\hat N_- - \cancel{\mathbb{1}}}{2}\right]$$

$$= \cancel{\hbar(\omega_1 + \omega_L)(\hat N_+ + \hat N_-)}$$

$$\boxed{H = \hbar\omega_1\left(\hat N_+ + \hat N_- + \mathbb{1}\right) + \hbar\omega\left(\hat N_z + \frac{\mathbb{1}}{2}\right) + \hbar\omega_L\left(\hat N_+ - \hat N_-\right)}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$\Rightarrow$ Autoestado: $|n_+, n_-, n_z\rangle$

Autoenergía:

$$\boxed{E_{n_+,n_-,n_z} = \hbar\omega_1 (n_+ + n_- + 1) + \hbar\omega (n_z + 1/2) \pm \hbar\omega_L (n_+ - n_-)}$$

no hay degeneración ya que no existen pares de números distintos $\in \mathbb{N}$ $\{n_+^{(1)}, n_-^{(1)}\}$ y $\{n_+^{(2)}, n_-^{(2)}\}$ tal que

$$n_+^{(1)} + n_-^{(1)} = n_+^{(2)} + n_-^{(2)}$$
$$n_+^{(1)} - n_-^{(1)} = n_+^{(2)} - n_-^{(2)}$$

b) Muestra que para campo pequeño ($\omega_L \ll \omega$) el efecto del término diamagnético es despreciable respecto del paramagnético.

Re:

$$H = \hbar\omega \left[\sqrt{1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2} \left(\hat{N}_+ + \hat{N}_- + \mathbb{I}\right) + \hat{N}_z + \frac{\mathbb{I}}{2} \pm \frac{\omega_L}{\omega}\left(\hat{N}_+ - \hat{N}_-\right)\right]$$

$$\underset{\omega_L \ll \omega}{\simeq} \hbar\omega \left[\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2\right)\left(\hat{N}_+ + \hat{N}_- + \mathbb{I}\right) + N_z + \frac{\mathbb{I}}{2} \pm \frac{\omega_L}{\omega}\left(\hat{N}_+ - \hat{N}_-\right)\right]$$

$$\underset{\text{a 1er orden en } \frac{\omega_L}{\omega}}{\simeq} \hbar\omega \left[\hat{N}_+ + \hat{N}_- + \hat{N}_z + \frac{3}{2}\mathbb{I}\right] \pm \hbar\omega_L \left(\hat{N}_+ - \hat{N}_-\right)$$

solo término paramagnético.

c) Considera el primer estado excitado del oscilador, o sea aquel cuya energía tiende a $\frac{5}{2}\hbar\omega$ cuando $\omega_L \to 0$. Estudia a primer orden en $\frac{\omega_L}{\omega}$ cómo se desdobla por la presencia de $\vec{B}$ (efecto Zeeman). Repite el cálculo para el 2do estado excitado.

Re: El primer estado excitado cuando $\omega_L \to 0$ está degenerado

$$E_{100} = E_{010} = E_{001} = \frac{5}{2}\hbar\omega$$

NOTA

Estudiemos cómo se desdobla haciendo teoría de perturbaciones.

Para eso, al ser un estado degenerado nos armamos la matriz V:

$$V_1 = \begin{pmatrix} \langle 100|V|100\rangle & \langle 100|V|010\rangle & \langle 100|V|001\rangle \\ \langle 010|V|100\rangle & \langle 010|V|010\rangle & \langle 010|V|001\rangle \\ \langle 001|V|100\rangle & \langle 001|V|010\rangle & \langle 001|V|001\rangle \end{pmatrix}$$

Con $V = \omega_L L_z = i\hbar\omega_L \left(a_x a_y^{+} - a_y a_x^{+} \right)$

y $E_{1,\nu}\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right) = E_1 + \underbrace{\lambda_\nu}_{\text{autovalor } \nu}$ y los autoestados serán los autovectores de la matriz V_1.

$$\left.\begin{aligned} V|100\rangle &= i\hbar\omega_L\left(|010\rangle - 0\right) \\ V|010\rangle &= i\hbar\omega_L\left(0 - |100\rangle\right) \\ V|001\rangle &= i\hbar\omega_L\,(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\omega_L & 0 \\ i\hbar\omega_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ autovalores: $\pm\hbar\omega_L$, 0

autovectores: $\frac{|100\rangle \pm i|010\rangle}{\sqrt{2}}$, $|001\rangle$

$\Rightarrow$

$\frac{5}{2}\hbar\omega$:

- $\frac{|100\rangle + i|010\rangle}{\sqrt{2}}$, $\frac{5}{2}\hbar\omega + \hbar\omega_L$
- $|001\rangle$, $\frac{5}{2}\hbar\omega$
- $\frac{|100\rangle - i|010\rangle}{\sqrt{2}}$, $\frac{5}{2}\hbar\omega - \hbar\omega_L$

Para el segundo estado excitado:

$$E_{110} = E_{101} = E_{011} = E_{200} = E_{020} = E_{002} = \frac{7}{2}\hbar\omega$$

HOJA N°

FECHA

$$V = \begin{pmatrix} \langle 200|V|200\rangle & \langle 200|V|110\rangle & \langle 200|V|020\rangle & \langle 200|V|011\rangle & \langle 200|V|101\rangle & \langle 200|V|002\rangle \\ \langle 110|V|200\rangle & \langle 110|V|110\rangle & \langle 110|V|020\rangle & \langle 110|V|011\rangle & \langle 110|V|101\rangle & \langle 110|V|002\rangle \\ \langle 020|V|200\rangle & \langle 020|V|110\rangle & \langle 020|V|020\rangle & \langle 020|V|011\rangle & \langle 020|V|101\rangle & \langle 020|V|002\rangle \\ \langle 011|V|200\rangle & \langle 011|V|110\rangle & \langle 011|V|020\rangle & \langle 011|V|011\rangle & \langle 011|V|101\rangle & \langle 011|V|002\rangle \\ \langle 101|V|200\rangle & \langle 101|V|110\rangle & \langle 101|V|020\rangle & \langle 101|V|011\rangle & \langle 101|V|101\rangle & \langle 101|V|002\rangle \\ \langle 002|V|200\rangle & \langle 002|V|110\rangle & \langle 002|V|020\rangle & \langle 002|V|011\rangle & \langle 002|V|101\rangle & \langle 002|V|002\rangle \end{pmatrix}$$

$$V|200\rangle = i\hbar\omega_L\sqrt{2}(|110\rangle - 0)$$

$$V|110\rangle = \sqrt{2}\, i\hbar\omega_L(|020\rangle - |200\rangle)$$

$$V|020\rangle = i\hbar\omega_L(0 - \sqrt{2}|110\rangle)$$

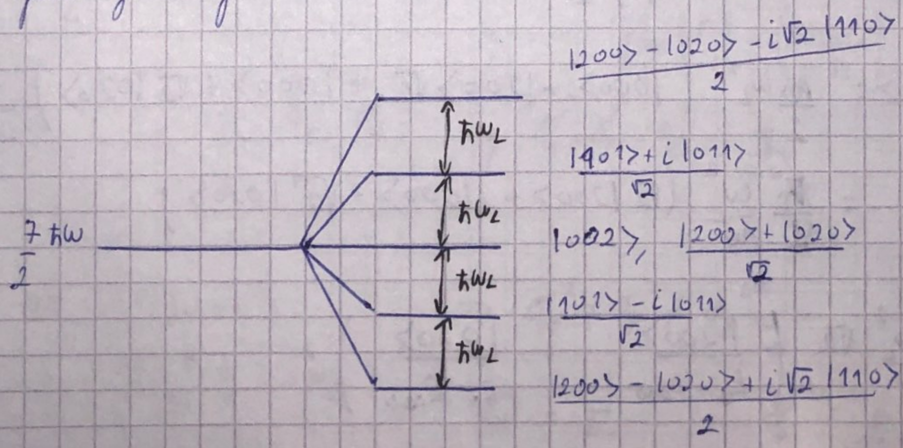
$$V|011\rangle = i\hbar\omega_L(-|002\rangle)$$

$$V|101\rangle = i\hbar\omega_L(|011\rangle - 0)$$

$$V|002\rangle = 0$$

$$V = i\hbar\omega_L \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalizamos y obtenemos:



NOTA

d) Evalúa el efecto diamagnético para el estado fundamental, es decir, cómo varía su energía con ω_L. En presencia del campo $\vec{B}$, ¿sigue siendo autoestado de L^2? ¿y de L_z? Muestra que el efecto de $\vec{B}$ consiste en comprimir la función de onda en $\hat{z}$ en un cociente $1+\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2$ y se induce una corriente.

Re: El fundamental es no degenerado

$$H = H_0 + \underbrace{\omega_L L_z + \frac{m}{2}\omega_L^2 (x^2+y^2)}_{V}$$

$$E_0^{(1)} = \langle 000|V|000\rangle = \omega_L \underbrace{\langle 000|L_z|000\rangle}_{0} + \frac{m\omega_L^2}{2}\langle 000|x^2+y^2|000\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{m\omega_L^2}{2}\langle 000|\, a_x^2 + 2a_x^\dagger a_x + \mathbb{I} + a_x^{\dagger 2} + a_y^2 + 2a_y^\dagger a_y + \mathbb{I} + a_y^{\dagger 2}|000\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{4}\frac{\omega_L^2}{\omega}\, 2 = \frac{\hbar}{2}\frac{\omega_L^2}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 \simeq \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar}{2}\frac{\omega_L^2}{\omega}}$$

$$|\chi_0^{(1)}\rangle = \sum_{n_x,n_y,n_z} \frac{\langle n_x n_y n_z|V|000\rangle}{E_0 - E_{n_x n_y n_z}} |n_x n_y n_z\rangle$$

pero

$$V|000\rangle = \frac{m\omega_L^2}{2}\left(|000\rangle + |200\rangle\sqrt{2} + |000\rangle + \sqrt{2}\,|020\rangle\right)\frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\frac{\omega_L^2}{\omega}\left(\sqrt{2}\,|200\rangle + 2|000\rangle + \sqrt{2}\,|020\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |\chi_0^{(1)}\rangle = \frac{\hbar\omega_L^2}{4\omega}\sqrt{2}\left(\frac{|200\rangle}{E_0 - E_{200}} + \frac{|020\rangle}{E_0 - E_{020}}\right)$$

$$= -\frac{\omega_L^2}{\omega^2}\frac{\sqrt{2}}{8}\left(|200\rangle + |020\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\chi_0\rangle = |000\rangle - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2\left(|200\rangle + |020\rangle\right)}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$L_z|\chi_0\rangle = 0 - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 i\hbar\, \overbrace{\left(a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger\right)\left(|200\rangle + |020\rangle\right)}^{0}$$

$= 0 \Rightarrow$ sigue siendo autoestado de L_z con autovalor 0

Puedo ver que no sigue siendo autoestado de L^2 recurriendo a L_x y L_y de forma análoga a lo de L_z

~~función de onda:~~

$$\cancel{\psi_0(x,y,z) \simeq \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \left[\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \frac{1}{2\sqrt{2}}\, e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} \left(\frac{4m\omega}{\hbar}x^2 - 2 + \frac{4m\omega}{\hbar}y^2 - 2\right)\right]}$$

$$\cancel{= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}} \left[1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \frac{1}{16}\left(\frac{4m\omega}{\hbar}(x^2+y^2) - 4\right)\right]}$$

$$\Rightarrow \frac{\psi_0^{(B\neq 0)}}{\psi_0^{(B=0)}} \simeq 1 + \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{m\omega}{4\hbar}(x^2+y^2)\right)$$

~~sin B:~~ $\cancel{\psi_{000} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}}}$

~~con B:~~ $\cancel{\psi_{000} = \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{3/4} (\omega_1 - \omega_L)\, e^{-\frac{m(\omega_1-\omega_L) r^2}{2\hbar}} \quad \omega_1 + \omega_L}$

sin B: $|000\rangle$ (N_x, N_y, N_z) y $\psi_{000}(r) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{m\omega r^2}{2\hbar}}$

y $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$

con B: $|000\rangle$ (N_+, N_-, N_z) $\Rightarrow \sigma_+^2 \neq \sigma_-^2 \neq \sigma_z^2$

$$\sigma_z^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \qquad \sigma_+^2 = \frac{\hbar}{m\omega_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_z}{\sigma_+} = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega}} = \left(\frac{\omega^2 + \omega_L^2}{\omega^2}\right)^{1/4} = \left[1 + \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2\right]^{1/4}$$

$\Rightarrow$ la dispersión en Z se achica respecto de las otras direcciones

NOTA

Corriente de prob lo campo $\vec{B}$:

$$\vec{J} = \frac{1}{2m}\left[\psi^{*}\hat{p}\psi - \psi\hat{p}\psi^{*} - 2q\vec{A}|\psi|^{2}\right]$$

i el fundamental ψ e ~~...~~ real $\Rightarrow$ la primera termine se anulan

y $$\vec{J} = -\frac{1}{2m}2q\vec{A}|\psi|^{2}$$

$$= -\frac{q}{m}\vec{A} = -\frac{qB}{2m}(x\hat{y} - y\hat{x}) = \boxed{\omega_L(x\hat{y} - y\hat{x}) = \vec{J}}$$

NOTA