Fìsica Teórica 2 – 1er. cuatrimestre de 2022 – Segundo parcial (7/07/2022)

(Justifique todas sus respuestas. Entregue los distintos problemas en hojas separadas. Ponga su nombre en todas las hojas. Se aprueba con 5,50 puntos, con la condición de tener al menos dos de los ejercicios con más del 50% de su desarrollo correcto.)

P1 El hamiltoniano de un sistema de espín 3/2 es diagonal en la base $\{|3/2\rangle, |-1/2\rangle, |1/2\rangle, |-3/2\rangle\}$ con autovalores $\{E_1, E_1, E_2, E_2\}$, respectivamente. Si a $t = 0$ se aplica al sistema un campo cuadrupolar debil, el potencial de interacción es: $V = A(S_x^2 - S_y^2)$.

(a) Usando el teorema de Wigner-Eckart determine qué elementos de matriz de la perturbación en la base no perturbada son no nulos, y encuentre la relación entre dichos elementos de matriz. *Ayuda:* Recuerde los tensores irreducibles: $T^{(2)}_{\pm 2} = \frac{(V_x \pm iV_y)^2}{2}$ y/o $T^{(2)}_0 = \frac{3V_z^2 - V^2}{\sqrt{6}}$.

(b) Calcule los elementos de matriz no nulos del punto anterior.

(c) Si el sistema se encontraba inicialmente en el estado $|3/2\rangle$, determine las amplitudes de transición a los otros estados en función del tiempo al primer orden no nulo.

(d) Resuelva el problema exactamente y compare con la solución del punto anterior. **Ayuda.** Puede escribir el operador evolución en cada subsistema de 2×2 usando operadores de Pauli adecuadamente empleados.

P2 Considere un átomo de dos niveles $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ que interactúa con el campo electromagnético cuantizado en una cavidad (en la aproximación dipolar). El Hamiltoniano del problema lo escribimos de la forma: $H = H_0 + V$ donde H_0 es el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings: $H_0 = \frac{\hbar\omega_A}{2}\sigma_z + \hbar\omega_C\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger\right)$ con $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\sigma_+ = |e\rangle\langle g| = \sigma_-^\dagger$; y V incorpora términos no incluidos en la RWA (ap. de onda rotante):

$$V = -i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_- \otimes a - \sigma_+ \otimes a^\dagger\right).$$

Si el sistema se encuentra en resonancia ($\omega_A = \omega_C$),

(a) Para el sistema sin perturbar (H_0):

(i) Verifique que el estado fundamental es $|g0\rangle$ y halle su energía.

(ii) Verifique que $|\Psi_{n\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, n-1\rangle \pm i\,|gn\rangle)$ $(n > 1)$ son los otros autoestados de orden cero y halle las correspondientes energías.

(b) Usando teoría de perturbaciones independiente del tiempo ($\Omega << \omega$), obtenga:

(i) La corrección a la energía del estado fundamental a segundo orden y sus respectivos autoestados a primer orden.

(ii) La corrección de las energías a primer orden en la perturbación.

Puede considerar que H_0 no tiene estados degenerados.

P3 Consideremos una partícula que sólo puede moverse por una circunferencia de radio unidad, de forma que su posición queda completamente caracterizada por el ángulo φ que forma el radiovector con el eje x. Una base del espacio de estados físicamente aceptables viene dada por los vectores $|m>$, con m entero ($m \in Z$) cuya función de onda asociada es

$$\langle\varphi|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Sea ahora un sistema formado por 2 partículas de este tipo, en estados caracterizados por los enteros $m_1 \neq m_2$.

(a) Determinar la función de onda del sistema para los casos en que las partículas sean (i) distinguibles, (ii) bosones de spin 0, (iii) fermiones de spin 1/2 en estado singlete, (iv) fermiones de spin 1/2 en estado triplete.

(b) Encontrar las densidades de probabilidad de que la posición de ambas partículas sea la misma (es decir $\varphi_2 = \varphi_1$) para los 4 casos (i), (ii), (iii) y (iv).

(c) Para los casos (iii) y (iv) calcular la corrección a la energía a primer orden debido a la interacción magnética entre los espines: $V = -\mu\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\mathbf{s_1} \cdot \mathbf{s_2}$ $(\mu > 0)$. ¿En qué caso la energía es menor?. Considere $H_0 = \frac{L_{z1}^2}{2I} + \frac{L_{z2}^2}{2I}$.